ISBN: 978-979-792-552-9

Pengembangan Teorema Ceva dan Teorema Menelaus pada Segiempat

Nurahmi [1*], Mashadi [2], Hasriati [2]

[1] Mahasiswa Program Studi Magister Matematika
[2] Dosen Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Binawidya 28293 Indonesia

*nurahmifaqih@yahoo.co.id

Abstrak

Pada tulisan ini dibahas pengembangan teorema Ceva dan teorema Menelaus pada segiempat dalam berbagai kasus. Kasus teorema Ceva membahas untuk titik yang berada di dalam segiempat nonkonveks, sedangkan pada teorema Menelaus dibahas untuk kasus segiempat nonkonveks, dan pada bagian terakhir akan dibahas teorema transversal Menelaus.

Kata kunci: Segiempat, teorema Ceva, teorema Menelaus, transversal Menelaus

1 Pendahuluan

Teorema Ceva pada segitiga digunakan untuk menunjukkan tiga buah garis berpotongan di satu titik (konkuren) [1, 2, 4, 5, 6, 7, 9], kasus lain dari teorema Ceva adalah tiga buah garis juga berpotongan di satu titik yang berada di luar segitiga, sedangkan teorema Menelaus pada segitiga digunakan untuk menunjukkan kolinearitas dari dua titik yang berada pada penggal garis (sisi-sisi segitiga) dan satu titik lagi berada pada perpanjangan sisi segitiga [1, 2, 3, 5, 6, 7, 9], jika kolinearitas dari tiga buah titik yang semuanya berada pada perpanjangan penggal garis (sisi-sisi segitiga) maka teorema ini dikenal dengan transversal Menelaus [6].

Selanjutnya teorema Ceva dan teorema Menelaus tidak hanya berlaku pada segitiga, namun bisa saja berlaku segiempat [2]. Dalam beberapa penelitian telah dibahas teorema Ceva pada segiempat yaitu berpotongan di satu titik yang berada didalam segiempat konveks. Pada tulisan ini dibahas teorema Ceva pada segiempat untuk titik yang berada di dalam segiempat nonkonveks. Sedangkan teorema Menelaus dalam penelitian [8] telah membahas dua buah titik yang berada pada sisi-sisi segiempat konveks dan dua titik yang lain berada pada perpanjangannya. Selanjutnya pada tulisan

ISBN: 978-979-792-552-9

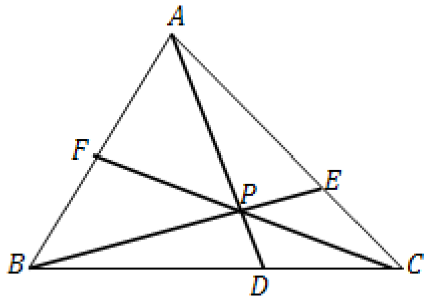
ini penulis membahas teorema Menelaus pada segiempat untuk kasus dua buah titik yang berada pada sisi-sisi segiempat nonkonveks dan dua titik yang lain berada pada perpanjangannya.

2 Teorema Ceva dan Menelaus pada Segitiga

Teorema 1 (Teorema Ceva) Jika *D*,*E* dan *F* masing-masing adalah titik pada sisi *BC*, *CA* dan *AB* pada segitiga *ABC*, maka garis *AD*, *BE*, dan *CF* adalah konkuren (berpotongan disatu titik) jika dan hanya jika

$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$$

Perhatikan Gambar 1 berikut,

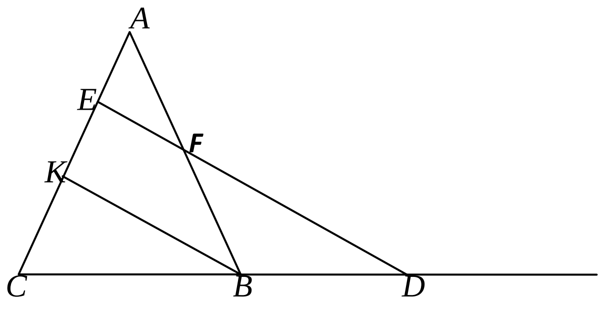


Gambar 1: Garis *AD*, *BE* dan *CF* konkuren di titik *P*

Teorema 2 (Teorema Menelaus) Jika titik D, E dan F masing-masing terletak pada sisi BC, CA, dan AB pada segitiga ABC, maka titik D, E dan F adalah segaris jika dan hanya jika

$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=-1$$

Perhatikan Gambar 2 berikut:

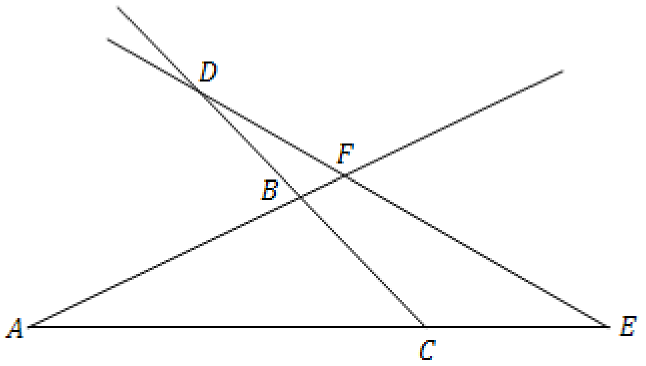


Gambar 2. Titik *D*, *E* dan *F* adalah kolinear

Teorema 3 (Teorema tranversal Menelaus) Jika titik D, E dan F masing-masing terletak pada sisi BC, CA, dan AB pada segitiga ABC, maka titik D, E dan F adalah segaris jika dan hanya jika

ISBN: 978-979-792-552-9

$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=-1$$



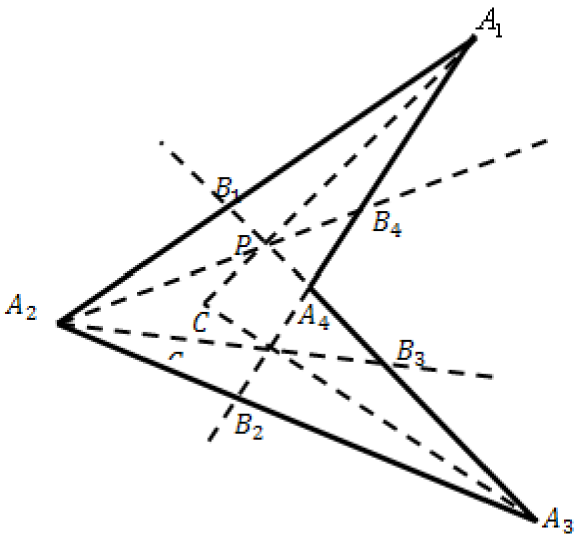
Gambar 3: Garis DEF memotong perpanjangan sisi BC, CA, AB

3 Teorema Ceva dan Menelaus pada Segiempat

Teorema 4 Misalkan $A_1A_2A_3A_4$ adalah segiempat sembarang (tidak konveks), dengan P adalah suatu titik berada di dalam segiempat. Misalkan pula B_i adalah titik yang berada pada sisi $A_i\,A_{i+1}$ dengan i=1,2,3,4 maka berlaku

$$\frac{A_1B_1}{B_1A_2}\cdot\frac{A_2B_2}{B_2A_3}\cdot\frac{A_3B_3}{B_3A_4}\cdot\frac{A_4B_4}{B_4A_1}=1 \qquad (1)$$

Bukti: Perhatikan Gambar 4,



Gambar 4: $A_1C, A_2B_4, A_4B_1, A_2B_3, A_3C, A_4B_2$ konkuren dititik P

Misalkan A_1C, A_2B_4, A_4B_1 dan A_2B_3, A_3C, A_4B_2 konkuren di titik P, maka akan dibuktikan:

ISBN: 978-979-792-552-9

$$\frac{A_1B_1}{B_1A_2}\cdot\frac{A_2B_2}{B_2A_3}\cdot\frac{A_3B_3}{B_3A_4}\cdot\frac{A_4B_4}{B_4A_1}=1$$

Dengan menggunakan teorema Ceva pada segitiga, diperoleh

$$\frac{A_2B_2}{B_2A_3}\cdot\frac{A_3B_3}{B_3A_4}\cdot\frac{A_4C}{CA_2}=1 \qquad (2)$$

$$\frac{A_4B_4}{B_4A_1}\cdot\frac{A_1B_1}{B_1A_2}\cdot\frac{A_2C}{CA_4}=1 \qquad (3)$$

Bila persamaan (2) dikalikan dengan persamaan (3) diperoleh

$$\frac{A_2B_2}{B_2A_3}\cdot\frac{A_3B_3}{B_3A_4}\cdot\frac{A_4C}{CA_2}\cdot\frac{A_4B_4}{B_4A_1}\cdot\frac{A_1B_1}{B_1A_2}\cdot\frac{A_2C}{CA_4}=1 \qquad (4)$$

Selanjutnya karena $\frac{A_4C}{CA_2}\cdot\frac{A_2C}{CA_4}=1$, maka persamaan (4) menjadi:

$$\frac{A_1B_1}{B_1A_2}\cdot\frac{A_2B_2}{B_2A_3}\cdot\frac{A_3B_3}{B_3A_4}\cdot\frac{A_4B_4}{B_4A_1}=1 \qquad \blacksquare$$

Ini bermakna bahwa $A_1C, A_2B_4, A_4B_1, A_2B_3, A_3C, A_4B_2$ berpotongan dititik P.

Teorema 5 Misalkan $A_1A_2A_3A_4$ adalah segiempat sembarang (nonkonveks), dan sebuah garis misalnya garis d memotong dua sisi pada segiempat yaitu sisi $A_1A_{2,}$ A_4A_1 dan memotong pada perpanjangan sisi A_2A_3, A_4A_3 masing-masing pada titik B_1, B_2, B_3, B_4 maka berlaku:

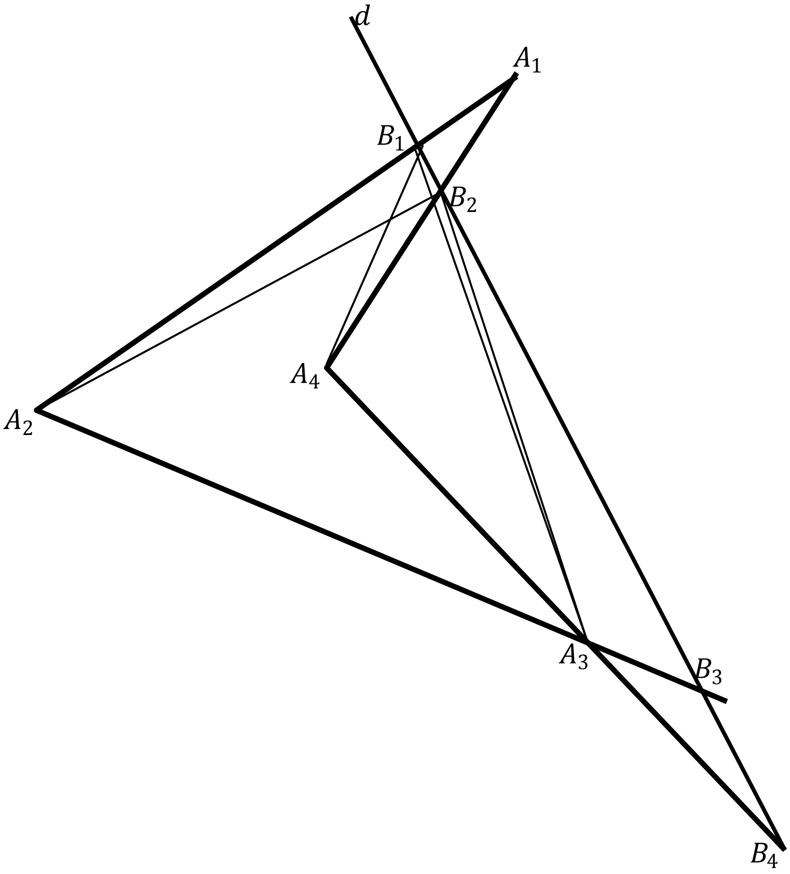
$$\frac{A_1B_1}{B_1A_2}\cdot\frac{A_2B_3}{B_3A_3}\cdot\frac{A_3B_4}{B_4A_4}\cdot\frac{A_4B_2}{B_2A_1}=1 \qquad (5)$$

Bukti: Perhatikan Gambar 5. Misalkan sebuah garis memotong segiempat $A_1A_2A_3A_4$ masing-masing di titik $B_1B_2B_3B_4$, lalu akan dibuktikan

$$\frac{A_1B_1}{B_1A_2}\cdot\frac{A_2B_3}{B_3A_3}\cdot\frac{A_3B_4}{B_4A_4}\cdot\frac{A_4B_2}{B_2A_1}=1$$

dengan menggunakan luas perbandingan segitiga.

ISBN: 978-979-792-552-9



Gambar 5: Titik Titik $B_1, B_{2,} B_3, B_4$ adalah segaris

Pada Gambar 5, ambil dua titik misalnya $B_1 B_2$, kemudian $\overline{B_1 B_2}$ sebagai alas segitiga, maka dari $\Delta A_2 B_1 B_2$ dan $\Delta A_3 B_1 B_2$ diperoleh

$$\frac{A_2B_3}{B_3A_3} = \frac{L\Delta A_2B_1B_2}{L\Delta A_3B_1A_2} \qquad (6)$$

Kemudian dari $\Delta A_3 B_1 B_2$ dan $\Delta A_4 B_1 B_2$ diperoleh :

$$\frac{A_3B_4}{B_4A_4} = \frac{L\Delta A_3B_1B_2}{L\Delta A_4B_1A_2} \qquad (7)$$

Dari $\Delta B_1 B_2 A_1$ dan $\Delta B_1 B_2 A_2$ diperoleh:

$$\frac{A_1B_1}{B_1A_2} = \frac{L\Delta A_1B_1B_2}{L\Delta A_2B_1B_2} \qquad (8)$$

Dari $\Delta B_1 B_2 A_4$ dan $\Delta B_1 B_2 A_1$diperoleh:

$$\frac{L\Delta A_4B_1B_2}{L\Delta A_1B_1B_2} = \frac{A_4B_2}{B_2A_1} \qquad (9)$$

Dari persamaan (6),(7),(8) dan (9) diperoleh:

ISBN: 978-979-792-552-9

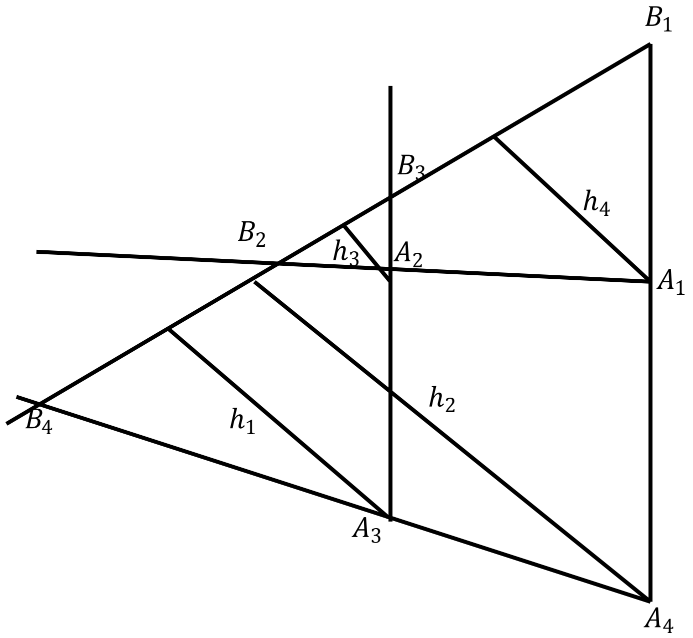
$$\frac{A_2B_3}{B_3A_3}\cdot\frac{A_3B_4}{B_4A_4}\cdot\frac{A_1B_1}{B_1A_2}\cdot\frac{A_4B_2}{B_2A_1}=\frac{L\Delta B_1B_2A_2}{L\Delta B_1B_2A_3}\cdot\frac{L\Delta A_3B_1B_2}{L\Delta A_4B_1B_2}\cdot\frac{L\Delta A_1B_1B_2}{L\Delta A_2B_1B_2}\cdot\frac{L\Delta A_4B_1B_2}{L\Delta A_1B_1B_2}=1 \quad \blacksquare$$

Ini berarti bahwa $B_1B_2B_3B_4$ adalah segaris.

Teorema 6 (Teorema transversal Menelaus) Misalkan $A_1A_2A_3A_4$ adalah segiempat sembarang, jika titik $B_1B_2B_3B_4$ masing-masing berada pada perpanjangan sisi A_4A_1, A_1A_2, A_2A_3, dan A_3A_4, maka berlaku:

$$\frac{A_1B_2}{B_2A_2}\cdot\frac{A_2B_3}{B_3A_3}\cdot\frac{A_3B_4}{B_4A_4}\cdot\frac{A_4B_1}{B_1A_1}=1 \qquad (10)$$

Bukti: Perhatikan Gambar 6 berikut:



Gambar 6: Garis h_1, h_2, h_3, h_4, adalah garis bantu.

Membuat masing-masing garis tegak lurus dari titik A_1, A_2, A_3, A_4 ke sisi $B_1B_2B_3B_4$ dengan panjang berturut-turut h_1, h_2, h_3, h_4, maka diperoleh:

$$\frac{A_1B_2}{B_2A_2} = -\frac{h_4}{h_3} \qquad (11)$$

$$\frac{A_2B_3}{B_3A_3} = -\frac{h_3}{h_1} \qquad (12)$$

$$\frac{A_3B_4}{B_4A_4} = -\frac{h_1}{h_2} \qquad (13)$$

$$\frac{A_4B_1}{B_1A_1} = -\frac{h_2}{h_4} \qquad (14)$$

Dari persamaan (11), (12), (13) dan (14) diperoleh:

$$\frac{A_1B_1}{B_1A_2}\cdot\frac{A_2B_3}{B_3A_3}\cdot\frac{A_3B_4}{B_4A_4}\cdot\frac{A_4B_2}{B_2A_1}=-\frac{h_4}{h_3}\cdot-\frac{h_3}{h_1}\cdot-\frac{h_1}{h_2}\cdot-\frac{h_2}{h_4}=1$$

■

Ini bermakna $B_1B_2B_3B_4$ adalah segaris.

Kesimpulan

Dari artikel ini dapat disimpulkan bahwa teorema Ceva dapat dikembangkan dalam beberapa kasus yaitu untuk titik yang berada di dalam segiempat nonkonveks. Sedangkan teorema Menelaus dapat dikembangkan pada kasus yaitu garis transversal memotong dua sisi dan dua perpanjangan sisi segiempat yang dibuktikan dengan perbandingan luas pada segitiga, selanjutnya garis transversal yang memotong semua perpanjangan sisi-sisi segiempat merupakan teorema transversal Menelaus pada segiempat.

Daftar Pustaka

[1] Benitez. J. 2007. A Unified Proof of Ceva and Menelaus' Theorems Using Projective Geometry. *Journal for Geometry and Grafichs*, 11: 39-44.

[2] Grunbaum, B & Shephard G. C. 1995. Ceva Menelaus and the Area Principle, *Mathematics Magazine*, 68: 254-260.

[3] Gogeometry. 1 hal. http :// www.gogeometry.com/ Menelaus1. htm. 24 November 2014. pk. 09.06

[4] Gogeometry. 1 hal. http :// www.gogeometry.com/ Ceva. htm. 24 November 2014. Pk. 09.01

[5] Hoo, H. K dan Meng, K. K.1996. On Menelaus Theorem, *Mathematical Medley*. 1: 19-23.

[6] Mashadi. 2012. *Buku Ajar Geometri*. Pusbangdik Universitas Riau, Pekanbaru.

[7] Silvester, J. R. 2000. Ceva = (Menelaus)^2. *The Mathematical Gazette*. 84:268-271

[8] Smarandache F,A Self Reccurrence Method for Generalizing known Scientific Results. http:// arxiv.org/ftp/math/papers/0611/0611960.24 November 2014.

[9] Yiu, P. 2001. *Introduction to the Geometry of the triangle*. Lecture Notes. Department of Mathematics Florida Atlantic University.