ISBN: 978-979-792-552-9

Menentukan Panjang Garis Tinggi pada Segitiga Menggunakan Konsep Kesebangunan

Leli Supiani[1*], Mashadi[2] , Sri Gemawati[2]

[1]Mahasiswa Program Studi Magister Matematika
[2]Dosen Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Binawidya, Pekanbaru 28293

[*]leli_supiani@yahoo.com

Abstrak

Dalam berbagai buku teks pada umumnya menentukan garis tinggi dapat dengan mudah dilakukan dengan menggunakan dalil Phytagoras. Hal ini disebabkan karena untuk garis tinggi, kita senantiasa mempunyai sudut siku-siku. Pada tulisan ini akan diberikan berbagai alternatif menentukan panjang garis tinggi dengan menggunakan konsep kesebangunan yaitu menggunakan jari-jari lingkaran luar dan mengkonstruksi belah ketupat.

Kata kunci: Belah ketupat, garis tinggi, jari-jari lingkaran luar, kesebangunan

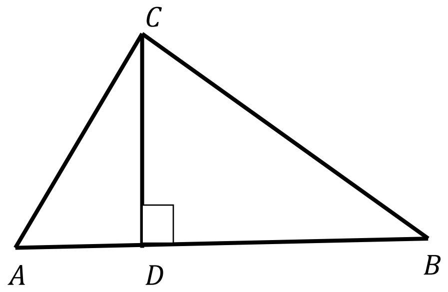
1 Pendahuluan

Misalkan terdapat segitiga sembarang, apabila garis ditarik dari masing-masing titik sudut segitiga tegak lurus kesisi hadapannnya maka garis itu disebut garis tinggi [2,3,4]. Garis tinggi tegak lurus dengan sisi didepannya sehingga garis tinggi membentuk sudut siku-siku terhadap sisi dihadapannya. Pada pembuktian sebelumnya mencari panjang garis tinggi yang dilakukan adalahmenggunakan dalil Phytagoras [2,5].

Garis tinggi merupakan bagian dari garis-garis istimewa yang terdapat dalam segitiga [2,3,4]. Berbagai alternatif pembuktian tentang garis istimewa banyak kita temukan sebelumnya, salah satunya seperti yang telah dilakukan oleh Amarasunghe [1] yang memaparkan pembuktian tentang garis bagi dalam artikelnya yang berjudul *"On the Standart Length of Angle Bisector and the Angle Bisector Theorem"*. Oleh karena itu merujuk pada artikel tersebut maka penulis memberikan berbagai alternatif pula untuk menentukan panjang garis tinggi menggunakan konsep kesebangunan. Pembuktian ini akan diperlihatkan pada dua kasus segitiga sembarang yaitu segitiga lancip dan segitiga tumpul.

Perhatikan ΔABC pada Gambar 2.

ISBN: 978-979-792-552-9



Gambar 2: ΔABC sembarang dengan tinggi CD

Panjang garis tinggi CD dari ΔABC sembarang pada Gambar 2 adalah,

$$t_c = \frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{c}.$$

Dalam buku teks [2,5] telah dibahas bagaimana cara menentukan panjang garis tinggisuatu segitiga. Cara yang digunakan adalah dengan menggunakan teorema phytagoras [2,5]. Pada artikel ini dibahas alternatif lain untuk menentukan panjang garis tinggi pada suatu segitiga yaitu dengan menggunakan konsep kesebangunan.

2 Menurunkan Rumus Garis Tinggi Menggunakan Jari-Jari Lingkaran Luar

Kasus Segitiga Lancip

Pada segitiga ABC, ketiga titik sudut dihubungkan sehingga terbentuk lingkaran luar, dan dari titik sudut C ditarik garis tinggi kesisi hadapannya yaitu CD, selain itu pada titik C juga ditarik garis tengah atau diameter lingkaran yaitu CE. Seperti terlihat pada gambar berikut:

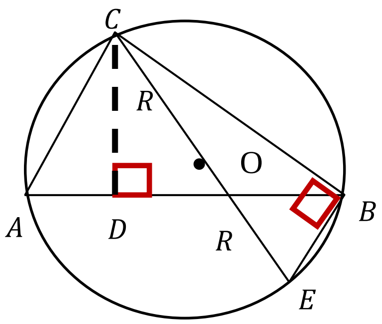
Perhatikan ΔBEC dan ΔDCA pada Gambar 2,

$\angle CAD = \angle CEB$ (menghadap busur yang sama),

$\angle CDA = \angle CBE$ (siku-siku = 90°),

berdasarkan Postulat dan teorema kesebangunan [2] maka dapat ditunjukkan $\Delta BEC \sim \Delta DAC$. Karena $\Delta BEC \sim \Delta DAC$sehingga diperoleh,

$$\frac{BC}{DC} = \frac{EC}{AC}.$$



Gambar 2: CE diameter lingkaran luar segitiga lancip

Jika $CD = t_C$ dan $CE = 2R$, sehingga diperoleh,

$$t_c = \frac{a.b}{2R}. \qquad (1)$$

Berdasarkan teorema pada lingkaran luar segitiga dalam [3] diperoleh jari-jari lingkaran luar yaitu,

$$R = \frac{abc}{4L}. \qquad (2)$$

Dan berdasarkan teorema pada lingkaran luar segitiga dalam [3] juga diperoleh luas segitiga sembarang yaitu,

$$L = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}. \qquad (3)$$

Bila persamaan (2) dan persamaan (3) disubtitusikan ke persamaan (1) maka diperoleh rumus garis tinggi pada segitiga yaitu,

$$t_c = \frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{c}.$$

Kasus Segitiga Tumpul

Pada ΔABC tumpul $\angle A > 90^\circ$, ketiga titik sudut dihubungkan sehingga terbentuk lingkaran luar, dan dari titik sudut C ditarik garis tinggi kesisi hadapannya yaitu CD, selain itu pada titik C juga ditarik garis tengah atau diameter lingkaran. Seperti terlihat pada Gambar 3.

Perhatikan ΔBEC dan ΔDCA pada Gambar 3,

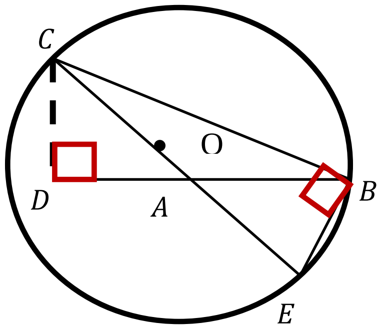
$\angle CAD = \angle CEB$ (menghadap busur yang sama),

$\angle CDA = \angle CBE$ (siku-siku = 90°),

berdasarkan Postulat dan teorema kesebangunan[4] maka dapat ditunjukkan $\Delta BEC \sim \Delta DAC$. Karena $\Delta BEC \sim \Delta DAC$sehingga diperoleh,

$$\frac{BC}{DC} = \frac{EC}{AC}.$$

ISBN: 978-979-792-552-9



Gambar 3: CE diameter lingkaran luar segitiga tumpul

Jika $CD = t_C$ dan $CE = 2R$, sehingga diperoleh,

$$t_c = \frac{a.b}{2R}. \tag{4}$$

Berdasarkan teorema pada lingkaran luar segitiga dalam [2] diperoleh jari-jari lingkaran luar yaitu

$$R = \frac{abc}{4L}. \tag{5}$$

Dan diperoleh luas segitiga sembarang yaitu,

$$L = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}. \tag{6}$$

bila persamaan (5) dan persamaan (6) disubtitusikan ke persamaan (4) maka diperoleh rumus garis tinggi pada segitiga yaitu

$$t_c = \frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{c}.$$

3 Alternatif Menurunkan Rumus Garis Tinggi Menggunakan Belah Ketupat

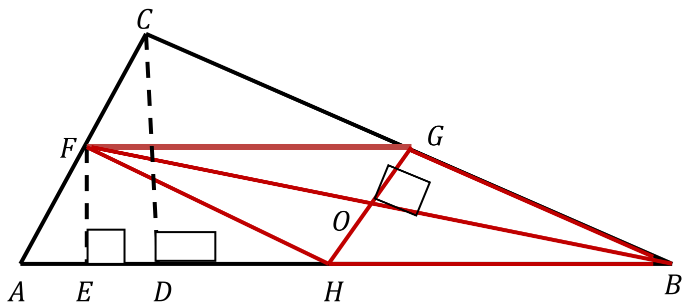
Kasus Segitiga Lancip

Pada segitiga ABC, akan dikontruksikan belah ketupat yaitu dengan cara menarik garis bagi dari titik B, lalu dikonstruksi garis sejajar AB yaitu FG dan garis sejajar BC yaituFH. Tarik garis dari titik F ke AB yaitu H, sehingga $HB = FG$ dan tarik garis dari titik F ke BC sehingga $BG = FH$. Dengan demikian terbentuk belah ketupat $BHFG$ di dalam segitiga.

Perhatikan Gambar 4. GarisBF adalah garis bagi, sehingga diperoleh

$$BF = ac\left(1 - \frac{b^2}{(a+c)^2}\right). \tag{7}$$

ISBN: 978-979-792-552-9



Gambar 4: $BHFG$ belah ketupat padasegitigaABC

Jika BF adalah garis bagi maka,

$$AF = \frac{bc}{a+c}. \tag{8}$$

$\angle CBA = \angle FHE$ (karena HF dan BC paralel), $\angle FAH = \angle CAB$,dengan demikian $\Delta HFA \sim \Delta BCA$ sehingga diperoleh

$$\frac{HF}{a} = \frac{AF}{b}. \tag{9}$$

Bila disubstitusikan (8) ke (9) diperoleh,

$$FH = \frac{ac}{a+c}. \tag{10}$$

Karena $BHFG$ adalah belah ketupat maka

$$FH = HB = BG = GH = \frac{ac}{a+c}. \tag{11}$$

$\angle FBE = \angle HBO$ dan $\angle FEH = \angle HOB = 90^0$, sehingga $\Delta BEF \sim \Delta BOH$ maka $BF/BH = BE/BO$, karena $BO = BF/2$ dengan mensubtitusikan (7) dan (11) diperoleh,

$$BE = \frac{(a+c)^2 - b^2}{2(a+c)}. \tag{12}$$

$\angle FEH = \angle CDB = 90^0$ dan $\angle CBA = \angle FHE$ (karena HF dan BC paralel), sehingga $\Delta EHF \sim \Delta DBC$ dan $EH/BD = HF/a$, kemudian mensubstitusikan (11) sehingga diperoleh

$$BD = \frac{EH(a+c)}{c}, \tag{13}$$

$EH = BE - BH$ bila disubstitusikan (11) dan (12) sehingga diperoleh,

$$EH = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2(a+c)}. \tag{14}$$

Bila disubstitusikan (14) ke (13), diperoleh,

$$BD = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c}. \tag{15}$$

Pada segitiga ABC diperoleh

ISBN: 978-979-792-552-9

$$t_c{}^2 = (a - BD)(a + BD). \qquad (16)$$

Bila persamaan (15) disubstitusikan ke persamaan (16) sehingga diperoleh

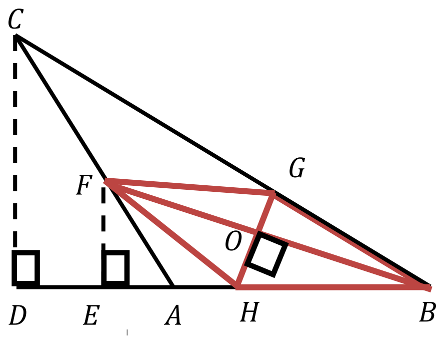
$$t_c{}^2 = \frac{(b-a+c)(b+a-c)(a+c+b)(a+c-b)}{4c^2}. \qquad (17)$$

Karena $s = \dfrac{a+b+c}{2}$, dengan demikian diperoleh,

$$t_c = \frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{c}.$$

Kasus Segitiga Tumpul

Pada segitiga ABC tumpul di $\angle A > 90^\circ$ akan dikontruksikan belah ketupat yaitu dengan cara menarik garis bagi dari titik B, lalu dikonstruksi garis sejajar AB yaitu FG dan garis sejajar BC yaitu FH. Tarik garis dari titik F ke AB yaitu H, sehingga $HB = FG$ dan tarik garis dari titik F ke BC sehingga $BG = FH$. Dengan demikian terbentuk belah ketupat $BHFG$.



Gambar 5: $BHFG$ belah ketupat padasegitigaABC

Perhatikan Gambar 5,.BF adalah garis bagi, sehinggadiperoleh

$$BF = ac\left(1 - \frac{b^2}{(a+c)^2}\right). \qquad (18)$$

Jika BF adalah garis bagi maka

$$AF = \frac{bc}{a+c}. \qquad (19)$$

$\angle CBA = \angle FHE$ (karena HF dan BC paralel), $\angle FAH = \angle CAB$, dengandemikian $\Delta HFA \sim \Delta BCA$ sehingga diperoleh,

$$\frac{HF}{a} = \frac{AF}{b}. \qquad (20)$$

Bila disubstitusikan (19) ke (20) diperoleh

ISBN: 978-979-792-552-9

$$FH = \frac{ac}{a+c}. \tag{21}$$

Karena $BHFG$ adalah belah ketupat maka

$$FH = HB = BG = GH = \frac{ac}{a+c}. \tag{22}$$

$\angle FBE = \angle HBO$ dan $\angle FEH = \angle HOB = 90^0$, sehingga $\Delta BEF \sim \Delta BOH$ maka $BF/BH = BE/BO$, karena $BO = BF/2$ dan dengan mensubtitusikan (18) dan (22) diperoleh

$$BE = \frac{(a+c)^2 - b^2}{2(a+c)}. \tag{23}$$

$\angle FEH = \angle CDB = 90^0$ dan $\angle CBA = \angle FHE$ (karena HF dan BC paralel), sehingga $\Delta EHF \sim \Delta DBC$ maka $EH/BD = HF/a$, dengan mensubstitusikan (22) diperoleh

$$BD = \frac{EH(a+c)}{c}, \tag{24}$$

$EH = BE - BH$ bila disubstitusikan (23) dan (22) diperoleh

$$EH = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2(a+c)}. \tag{25}$$

Bila disubstitusikan (25) ke (24) diperoleh,

$$BD = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c}. \tag{26}$$

Pada segitiga ABC diperoleh,

$$t_c^{\ 2} = (a - BD)(a + BD). \tag{27}$$

Bila persamaan (26) disubstitusikan ke persamaan (27) sehingga diperoleh,

$$t_c^{\ 2} = \frac{(b-a+c)(b+a-c)(a+c+b)(a+c-b)}{4c^2}. \tag{28}$$

Karena $s = \dfrac{a+b+c}{2}$, dengan demikian diperoleh,

$$t_c = \frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{c}.$$

Kesimpulan

Dalam artikel ini dapat disimpulkan bahwa terdapat dua cara dalam menentukan panjang garis tinggi menggunakan konsep kesebangunan yaitu: menggunakan jari-jari lingkaran luar segitiga dan menggkonstruksi belah ketupat dalam segitiga. Namun, dengan menggkonstruksi belah ketupat ini jugamenggunakan konsep garis bagi.

Daftar Pustaka

[1] Amarasunghe, G. W. I. S. 2012. On The Standard Lengths of Angle Bisectors and the Angle Bisector Theorem. *Global Journal of Advanced Research on Classical and Modern Geometries*, 1: 15-27.
[2] Mashadi. 2012. *Buku Ajar Geometri*. PUSBANGDIK UNRI. Pekanbaru.
[3] Mohammad Rahmat. 2001. *Geometri*. Pusat Penerbitan Universitas Terbuka. Jakarta.
[4] Moise, D. 1964. *Geometry*. Addison-Wesley Publishing Company. London.
[5] Sartono Wirodikromo. 2006. *Matematika untuk SMU Kelas X*. Penerbit Erlangga. Jakarta.
[6] Spark, J. C. 2002. *The Phytagorean Theorem Crown Jewel of Mathematics*. Sparrow-Hawke. USA.