ISBN: 978-979-792-552-9

Alternatif Menentukan Persamaan Garis Singgung Elips

Fauziah [1*], Mashadi [2], Sri Gemawati [2]

[1] Mahasiswa Program Studi Magister Matematika, Guru MAN 1 Pekanbaru
[2] Dosen Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Binawidya, Pekanbaru 28293

[*]fauziah.math@yahoo.co.id

Abstrak

Persamaan garis singgung elips biasanya diperoleh dengan cara diskriminan dan substitusi, yaitu persamaan garis dengan gradien *m* disubtitusikan pada persamaan elips. Kemudian diperoleh persamaan kuadrat. Karena garis tersebut menyinggung elips, maka diskriminan sama dengan nol, sehingga diperoleh nilai konstanta. Nilai konstanta tersebut disubstitusikan ke persamaan garis dengan gradien *m*, maka diperoleh persamaan garis singgung elips. Pada tulisan ini dibahas alternatif lain menentukan persamaan garis singgung elips yaitu dengan menggunakan konteks limit dan jarak antara titik terhadap garis lurus.

Kata kunci: Elips, garis singgung, jarak, limit

1 Pendahuluan

Semua siswa harus memiliki kesempatan dan dukungan yang diperlukan untuk belajar matematika secara mendalam dan dengan pemahaman. Tidak ada pertentangan antara kesetaraan dan keunggulan, NCTM (2000,h .50) dalam buku [2].

Geometri salah satu dari cabang matematika, yang dapat didefinisikan sebagai salah satu cabang matematika yang mempelajari tentang bentuk, ruang, komposisi beserta sifat sifatnya, ukuran ukurannya dan hubungannya antara yang satu dengan yang lainnya .

Irisan kerucut adalah lokus dari semua titik yang membentuk kurva dua dimensi, yang terbentuk oleh irisan sebuah kerucut dengan sebuah bidang. Salah satu bentuk irisan kerucut adalah elips [10, 9, 6, 5].

Garis singgung kurva adalah garis lurus yang hanya menyentuh kurva pada titik tertentu dan memiliki lereng yang sama sebagai fungsi pada saat itu.

ISBN: 978-979-792-552-9

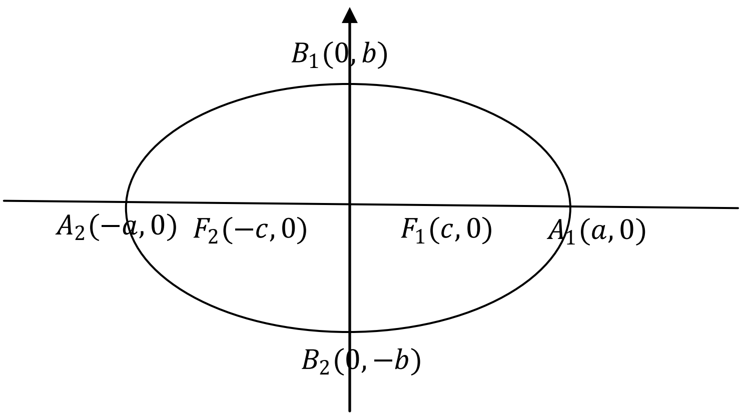
Pada umumnya di beberapa buku-buku SMA/MA [7,8], untuk menentukan persamaan garis singgung elips dengan menggunakan gradien, substitusi dan diskriminan, sangat jarang dijumpai pola atau rumus untuk menentukan persamaan garis singgung melalui suatu titik di luar elips.

Penulis tertarik untuk merumuskan alternatif lain dalam menentukan persamaan garis singgung elips dengan menggunakan pengetahuan dasar sederhana yang telah dimiliki siswa. Oleh karena itu penulis merumuskan judul untuk makalah ini "Alternatif Menentukan Persamaan Garis Singgung Elips".

2 Garis Singgung Elips

Persamaan elips pada pusat $O(0,0)$, dengan titik fokus $F_1(-c,0)$ dan $F_2(c,0)$, yang tampak pada Gambar 1 adalah

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{1}$$

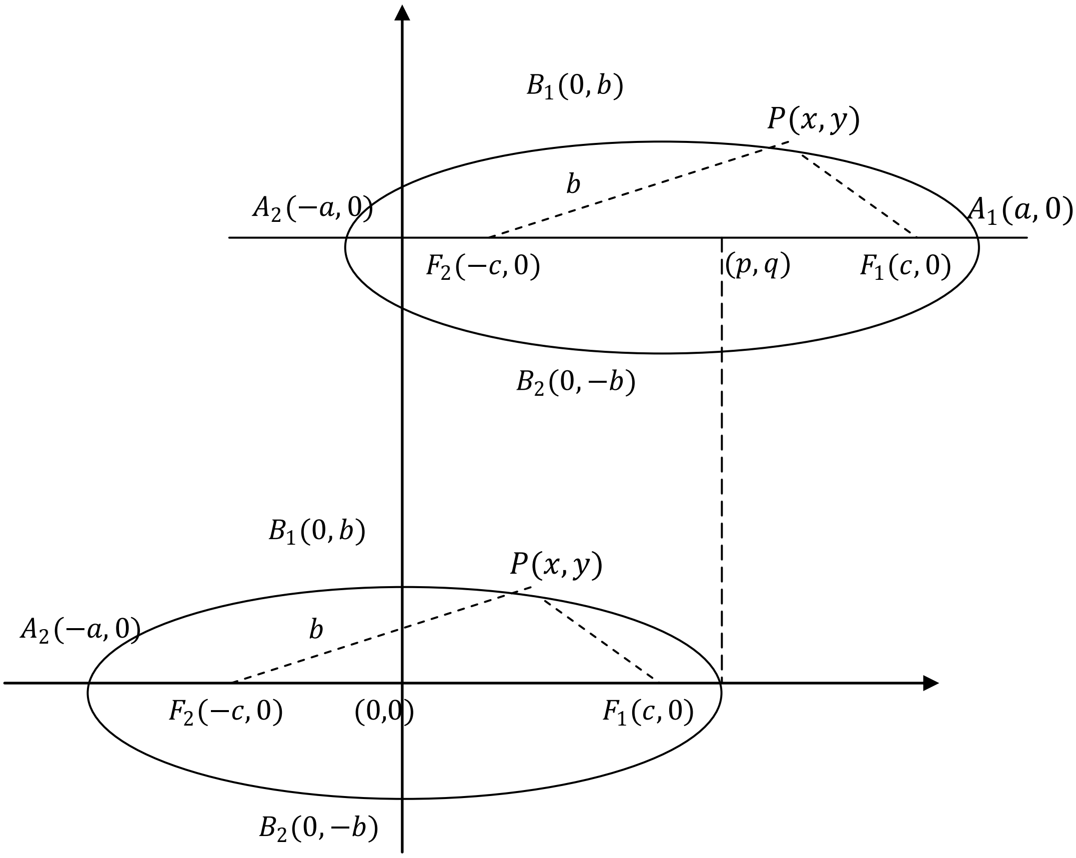


Gambar 1: Elips berpusat di (0,0)

Untuk menentukan persamaan elips yang berpusat (p,q), dengan menggunakan transformasi yaitu menggeser x sejauh p dan y sejauh q seperti pada Gambar 2, didapat persamaan

$$\frac{(x-p)^2}{a^2}+\frac{(y-q)^2}{b^2}=1 \tag{2}$$

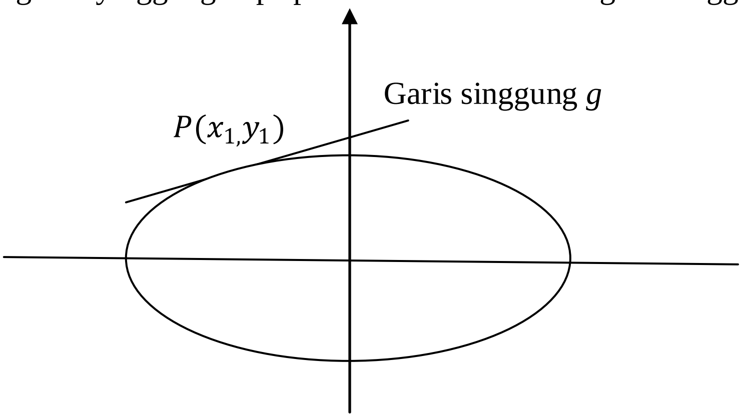
ISBN: 978-979-792-552-9



Gambar 2: Elips pada pusat (p,q)

Persamaan Garis Singgung Melalui suatu Titik pada Elips dengan Menggunakan Gradien

Misalkan titik $P(x_{1,}y_1)$ terletak pada elips (1), melalui titik $P(x_{1,}y_1)$ dapat dibuat sebuah garis yang menyinggung elips pada Gambar 3 disebut garis singgung elips.



Gambar 3: Elips dengan $P(0,0)$

Persamaan garis singgung melalui titik $P(x_1, y_1)$ adalah

$$y - y_1 = m\,(x - x_1). \tag{3}$$

Karena titik $P(x_1,y_1)$ terletak pada elips, maka gradien m dapat ditentukan dengan memakai tafsiran geometri turunan [7, 3, 4], yaitu

$$m = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1,y_1)}.$$

Dengan mengambil diferensial pada persamaan elips, didapat

$$d\left(\frac{x^2}{a^2}\right) + d\left(\frac{y^2}{b^2}\right) = d(1)$$

$$\frac{2x}{a^2}dx + \frac{2y}{b^2}dy = 0$$

$$\frac{2y}{b^2}dy = -\frac{2x}{a^2}dx$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}$$

$$m = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1,y_1)} = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x_1}{y_1} \tag{4}$$

Substitusikan persamaan (4) ke persamaan (3), didapat

$$y - y_1 = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x_1}{y_1}(x - x_1)$$

$$b^2xx_1 + a^2y_1y = b^2{x_1}^2 + a^2{y_1}^2.$$

Masing-masingruas dibagi dengan a^2b^2, diperoleh

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = \frac{{x_1}^2}{a^2} + \frac{{y_1}^2}{b^2} \tag{5}$$

Karena titik $P(x_1,y_1)$ terletak pada elips (1) maka berlaku

$$\frac{{x_1}^2}{a^2} + \frac{{y_1}^2}{b^2} = 1. \tag{6}$$

Persamaan (6) disubstitusikan pada persamaan (5), maka didapat persamaan garis singgung yang melalui titik $P(x_1,y_1)$ pada elips (1) adalah

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1 \tag{7}$$

Jadi, persamaan (7) adalah persamaan garis singgung melalui suatu titik pada elips dengan pusat (0,0).

Untuk persamaan garis singgung suatu titik berada pada elips dengan pusat $P(p,q)$, dapat dilakukan dengan menggunakan transformasi yaitu menggeser x sejauh p dan sejauh q pada sumbu y, sehingga persamaannya menjadi

$$\frac{(x_1-p)(x-p)}{a^2} + \frac{(y_1-q)(y-q)}{b^2} = 1. \tag{8}$$

ISBN: 978-979-792-552-9

Persamaan Garis Singgung Melalui suatu Titik di Luar Elips dengan Menggunakan Gradien

Untuk menentukan persamaan garis singgung melalui titik $A(x_1, y_1)$ di luar elips, tidak ada rumus khusus, hanya ada langkah-langkah sebagai berikut:

Langkah 1. Menentukan gradien garis singgung m.

- Misalkan garis singgung l dengan gradien m melalui titik $A(x_1, y_1)$, garis l mempunyai persamaan $y = m\,(x - x_1) + \; y_1$.
- Garis l disubstitusikan ke persamaan elips, maka didapatkan suatu bentuk persamaan kuadrat x atau y.
- Karena garis l menyinggung elips, maka diskriminannya sama dengan nol, maka diperoleh nilai $m_1$dan m_2.

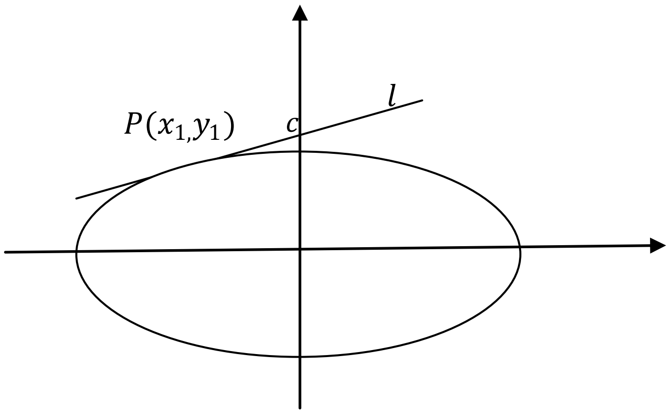
Langkah 2. Membuat persamaan garis singgung dengan gradien m_1 dan m_2 melalui titik $A(x_1, y_1)$.

Persamaan Garis Singgung Elips dengan Gradien Tertentu Menggunakan Substitusi dan Diskriminan

Misalkan garis singgung l memotong sumbu y di titik $(0, c)$ dengan gradiennya adalah m, seperti pada Gambar 4, persamaan garis l pada persamaan (4) adalah persamaan garis singgung dengan gradien m [8,1], maka

$$y = mx + c \tag{9}$$

Bila persamaan (9) disubstitusikan ke persamaan (1), maka



Gambar 4: Elips dengan gradien tertentu

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(mx + c)^2}{b^2} = 1$$

$$(b^2 + a^2m^2)\,x^2 + (2a^2mc)x + a^2c^2 - a^2b^2 = 0.$$

Karena garis l menyinggung elips (1) maka diskriminannya sama dengan nol,

$$(2a^2mc)^2 - \;4\,(b^2 + a^2m^2)(a^2c^2 - a^2b^2) = 0$$

$$4\,a^4m^2c^2 - 4(a^2b^2c^2 + a^4m^2c^2 - a^2b^4 - a^4m^2b^2) = 0,$$

kemudian dibagidengan $4a^2$, diperoleh

ISBN: 978-979-792-552-9

$$b^2c^2 - b^4 - a^2m^2b^2 = 0,$$

selanjutnya dibagi dengan b^2 diperoleh

$$c = \pm\sqrt{b^2 + a^2m^2}\,. \tag{10}$$

Substitusikan persamaan (10) ke persamaan (9), maka didapat

$$y = mx \pm \sqrt{b^2 + a^2m^2}. \tag{11}$$

Jadi persamaan (11) adalah persamaan garis singgung elips dengan gradien tertentu pada pusat $(0,0)$.

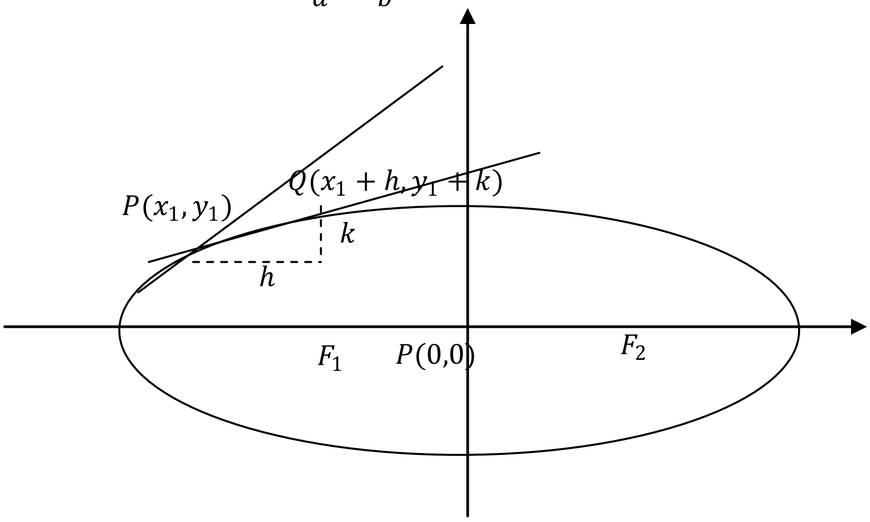
3 Alternatif Persamaan Garis Singgung Elips

Persamaan Garis Singgung Pada elips dengan Menggunakan Limit

Untuk menentukan persamaan garis singgung suatu titik pada elips dengan pusat $P(0,0)$ adalah sebagai berikut.

Misalkan titik $P(x_1,y_1)$ terletak pada elips (1) pada Gambar 5, maka titik $P(x_1,y_1)$ akan memenuhi persamaan yaitu:

$$\frac{x_1{}^2}{a^2}+\frac{y_1{}^2}{b^2}= 1 \tag{12}$$



Gambar 5: Garis singgung elips pada pusat $P(0,0)$

Jika terdapat titik $Q(x_1 + h,\ y_1 + k)$ dekat dengan titik $P(x_1,y_1)$ pada persamaan elips (12), maka

$$\frac{(x_1+h)^2}{a^2}+\frac{(y_1+k)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{{x_1}^2+2x_1h+h^2}{a^2}+\frac{{y_1}^2+2y_1k+k^2}{b^2}=1 \tag{13}$$

Gabungkan persamaan (12) dengan persamaan (13), sehingga

$$\frac{{x_1}^2}{a^2}+\frac{{y_1}^2}{b^2}=\frac{{x_1}^2+2x_1h+h^2}{a^2}+\frac{{y_1}^2+2y_1k+k^2}{b^2}$$

$$\frac{2x_1h+h^2}{a^2}+\frac{2y_1k+k^2}{b^2}=0$$

$$h\left(\frac{2x_1+h}{a^2}\right)+k\left(\frac{2y_1+k}{b^2}\right)=0$$

$$\frac{k}{h}=-\frac{b^2}{a^2}\left(\frac{2x_1+h}{2y_1+k}\right)$$

Jika Q mendekati P ($Q \to P$), maka $h:=0$ dan $k:=0$ dan karena kemiringan garis singgung adalah limit dari kemiringan tali busur maka,

$$m = lim\frac{k}{h}=-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$$

Dengan berasumsi bahwa gradien garis singgung adalah benar $-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$ maka persamaan garis singgung elipsdi titik $P(x_1, y_1)$, adalah sebagai berikut:

$$y=-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x-x_1)+y_1$$

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=\frac{{x_1}^2}{a^2}+\frac{{y_1}^2}{b^2}$$

Maka persamaan garis singgungnya adalah

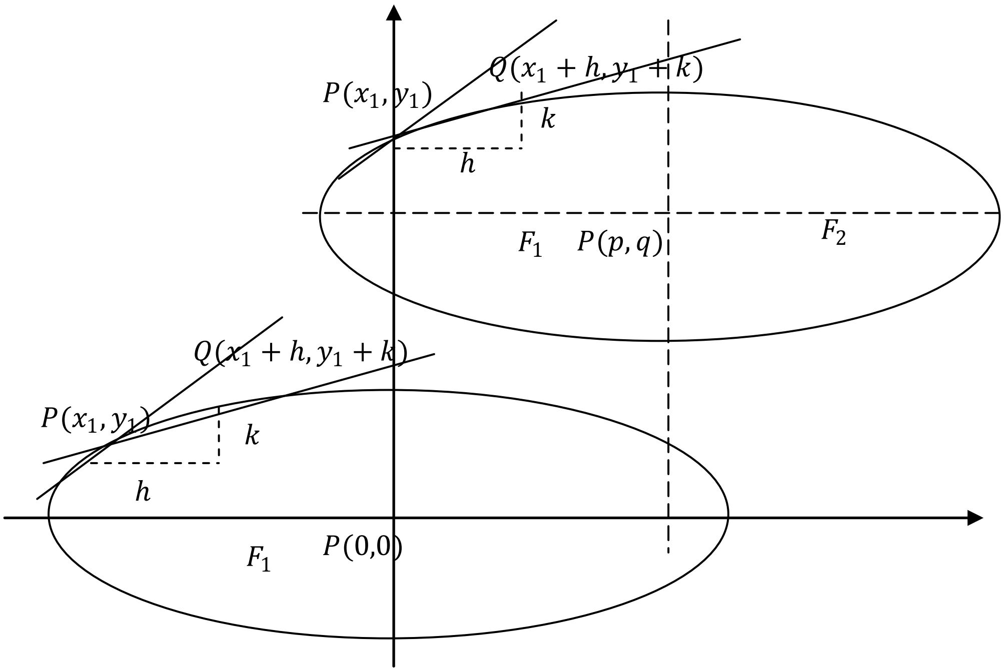
$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1 \tag{14}$$

Jadi persamaan (14) adalah persamaan garis singgung melalui suatu titik pada elips dengan pusat$(0,0)$.

Untuk menentukan persamaan garis singgung yang melalui sutu titik pada elips dengan pusat (p,q), bisa dilakukan dengan transformasi yaitu menggeser x sejauh p dan y sejauh q, pada Gambar 6 dapat diperlihatkan, maka persamaannya menjadi

$$\frac{(x_1-p)(x-p)}{a^2}+\frac{(y_1-q)(y-q)}{b^2}=1. \tag{15}$$

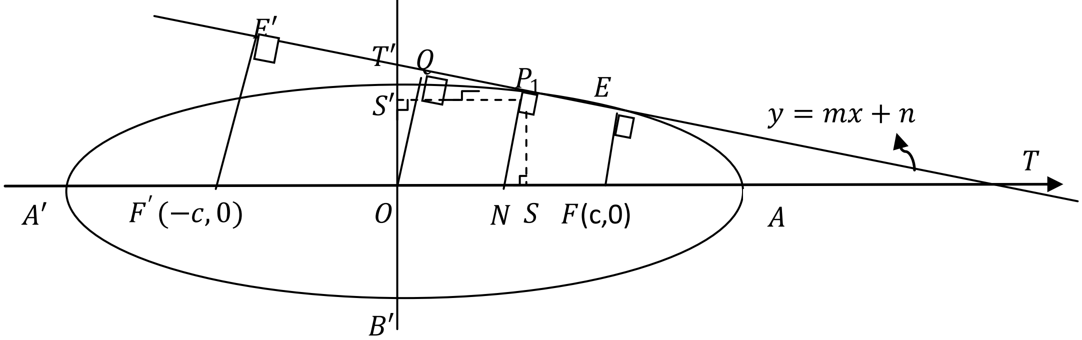
ISBN: 978-979-792-552-9



Gambar 6: Garis singgung elips dengan gradien tertentu pada pusat $P(p,q)$

Menentukan Persamaan Garis Singgung Elips dengan Gradien Tertentu Menggggunakan Rumus Jarak Sebuah Titik terhadap Garis

Untuk menentukan persamaan garis singgung pada elips dengan gradien tertentu pada pusat (0,0), pada Gambar 7 akan diuraikan.



Gambar 7: Elips dengan gradien tertentu pusat $(0,0)$

Diketahui titik E dan E' berada pada garis singgung $E'T$, dengan persamaan garis $E'T$ adalah

$$y = mx + n \qquad (16)$$

Dikontruksikan garis $F'E'$, OQ dan FE tegak lurus terhadap garis P_1T sedangkan P_1S dan P_1S' tegak lurus terhadap semua sumbu, sehingga berlaku

$$F'E'.FE = b^2. \qquad (17)$$

Dengan menggunakan rumus jarak titik terhadap garis diperoleh:

$$\frac{m(-c)-0+n}{\sqrt{m^2+(-1)^2}} \cdot \frac{m(c)-0+n}{\sqrt{m^2+(-1)^2}} = b^2 \tag{18}$$

$$n^2 = m^2\,(b^2+c^2) + b^2.$$

Karena $b^2 + c^2 = a^2$ maka $n^2 = a^2m^2 + b^2$, sehingga

$$n = \pm\sqrt{a^2m^2+b^2}\,. \tag{19}$$

Substitusikan persamaan (19) kepersamaan (16), sehingga diperoleh

$$y = mx \pm\sqrt{a^2m^2+b^2}\;. \tag{20}$$

Untuk menentukan persamaan garis singgung elips pada pusat $P(p,q)$ dengan menggunakan transformasi, berarti x digeser sejauh p dan y sejauh b, pada Gambar 8 dapat diperlihatkan bahwa persamaannya menjadi

$$y-q = m(x-p) \pm\sqrt{a^2m^2+b^2} \tag{21}$$

Jadi persamaan (21) adalah persamaan garis singgung elips dengan gradien tertentu pada pusat (p,q).

Menentuan Persamaan Garis Singgung Melalui suatu Titik di Luar Elips

Untuk persamaan garis singgung melalui suatu titik di luar elips, tidak ada rumus khusus, hanya dengan memperhatikan Langkah1 dan Langkah 2, maka penulis menurunkan rumusnya, sebagai berikut:

Persamaan garis singgung dengan gradien m melalui titik (x_1, y_1) adalah:

$$y = y_1 + m\,(x-x_1). \tag{22}$$

Persamaan (22) disubstitusikan ke dalam persamaan (1), sehingga:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{\left(y_1+m\,(x-x_1)\right)^2}{b^2} = 1.$$

$$(b^2+a^2m^2)x^2 + (2y_1ma^2 - 2x_1a^2m^2)x + a^2{y_1}^2 - 2y_1mx_1a^2 + {x_1}^2a^2m^2 - a^2b^2 = 0.$$

Karena garis menyinggung elips, maka diskriminan sama dengan nol, sehingga

$$(2y_1ma^2 - 2x_1a^2m^2)^2 - 4(b^2+a^2m^2)(a^2{y_1}^2 - 2y_1mx_1a^2 + {x_1}^2a^2m^2 - a^2b^2) = 0.$$

Dengan menggunakan rumus *abc*, diperoleh

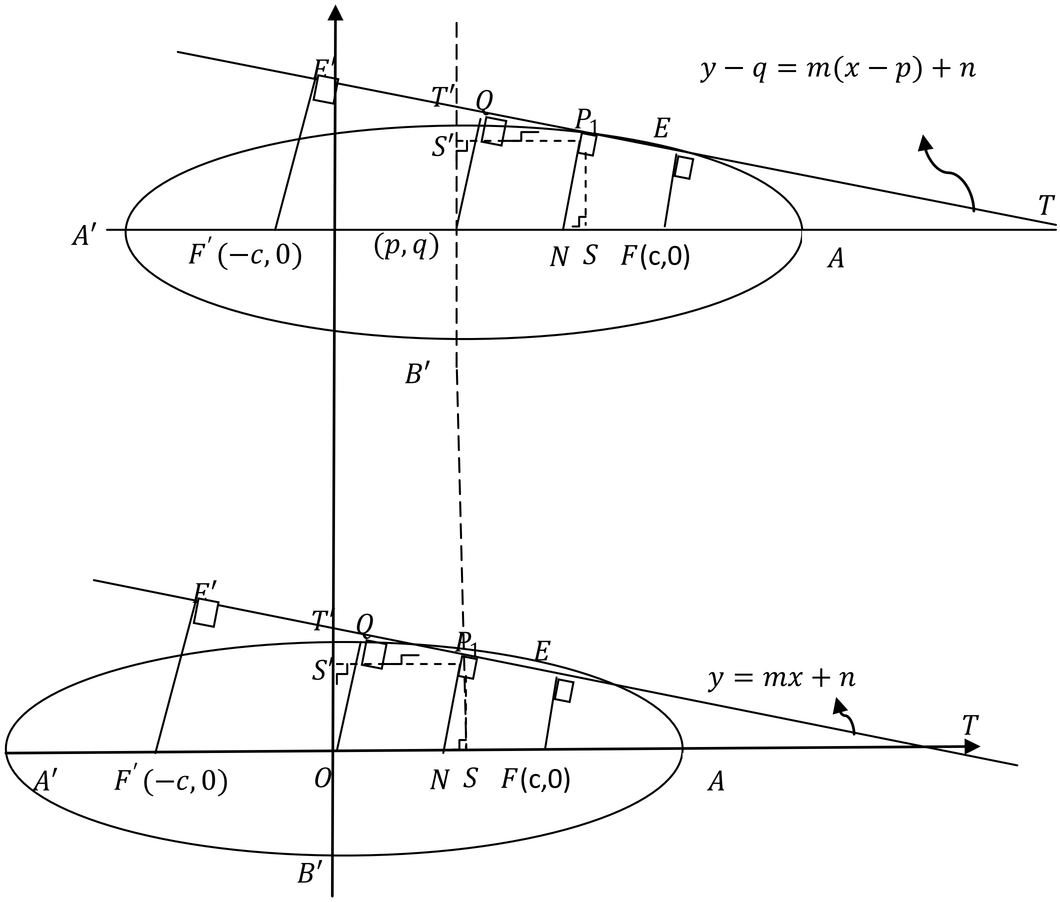
$$m_{1.2} = \frac{-2y_1x_1a^2 4b^2 \pm \sqrt{\left(2y_1x_1a^2 4b^2\right)^2 - 4\left(4a^2a^2b^2 - 4b^2{x_1}^2a^2\right)(4b^2a^2b^2 - 4b^2a^2{y_1}^2)}}{2\left(4a^2a^2b^2 - 4b^2{x_1}^2a^2\right)}.$$

$$m_{1.2} = \frac{-y_1x_1 \pm \sqrt{(a^2{y_1}^2 + b^2{x_1}^2 - a^2b^2)}}{(a^2-{x_1}^2)}.$$

Nilai $m_{1.2}$ disubstitusikan ke persamaan (22), maka diperoleh

$$y_{1.2} = \frac{-y_1x_1 \pm \sqrt{(a^2{y_1}^2 + b^2{x_1}^2 - a^2b^2)}}{(a^2-{x_1}^2)}(x-x_1) + y_1.$$

ISBN: 978-979-792-552-9



Gambar 8: Elips pada pusat $P(p, q)$ dengan gradien tertentu

Kesimpulan

Pada makalah ini sudah dibahas bagaimana menentukan persamaan garis singgung elips, dengan cara menggunakan gradien, dengan cara substitusi dan diskriminan kemudian menentukan garis singgung di luar elips.

Dengan adanya perubahan kurikulum, yang sekarang sudah memasuki Kurikulum 2013, pada dasarnya sangat menuntut para guru agar bisa berinovasi, kreatif, dan memberikan solusi yang terbaik untuk siswanya. Untuk itu, penulis mencoba mencari alternatif lain persamaan garis singgung elips, dengan cara pendekatan limit, dengan menggunakan rumus jarak titik terhadap garis. Ternyata untuk menentukan persamaan garis singgung elips dengan pusat $P(p, q)$, bila menggunakan transformasi yang artinya menggeser x sejauh p dan menggeser y sejauh q, akan jauh lebih mudah, cepat dan hasil dari rumusnya juga sama.

ISBN: 978-979-792-552-9

Daftar Pustaka

[1] Keisler, H. J. 2013, *Elementary Calculus*, www.math.wisc.edu//keisker/ calc.html.
[2] DeWalle, J. A. V. 2007. *Matematika Sekolah Dasar dan Menengah*, Erlangga, Jakarta.
[3] Leung, K. T dan Suen, S. N. 1994. *Vectors , Matrices and Geometry*, Hongkong University Press.
[4] Siceloff , L. P, Wentworth, G dan Smith, D. E, *Analytic Geometry*, Ginn and Company.
[5] Reneau L.N.2010, *Tangents to Conic Sections*, University of Texas at Austin,.
[6] Mashadi. 2012, *Geometry*, Pusbangdik UR.
[7] Wirodikromo S . 1996, *MatematikaUntuk SMU Kelas 3 Program IPA* Erlangga, Jakarta,.
[8] Subardjo , Adam N.A. dan Sunaringsih M.B. 2004,*Matematika 3A Untuk SMU Kelas 3 Kurikulum 1994 semester 1*,Bumi Aksara.
[9] Susanto. 2012, *GeometriAnalitikDatar*, UniversitasJember,.
[10] Varberg, Purcell, dan Rigdon. 2011, *Kalkulusedisi 9 julid 2*, Erlangga, Jakarta,.