Beberapa Penurunan Metode Integrasi Numerik: Aturan Simpson *

M. Imran

mimran@unri.ac.id

Laboratorium Matematika Terapan Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Binawidya Pekanbaru (28293)

Ringkasan

We discussed some derivations of Simpson rule formulas that are not commonly discussed in numerical analysis texts. The derivation involved a Lagrange interpolating polynomial, and a quadratic polynomial analytically and a combination of trapezoidal rule and midpoint rule, and a combination trapezoidal rule analytically and numerically. All the derivations ended up with the same formula of Simpson rule.

Keywords: *Simpson rule, Lagrange polynomial, midpoint rule, trapezoidal rule*

Ringkasan

Artikel ini membahas beberapa cara penurunan metode integrasi numerik, aturan Simpson, yang sering tidak di sajikan di buku-buku teks metode numerik. Penurunan meliputi penggunaan interpolasi polynomial Lagrange, polynomial kuadratik, kombinasi aturan trapesium dan titik tengah secara analitik dan numerik, kombinasi aturan trapesium secara anlitik dan numerik. Secara umum semua penurunan menemukan formula aturan Simpson yang sama.

Keywords: *Aturan Simpson, polinomial Lagrange, aturan titik tengah, aturan trapesium*

1 Pendahuluan

Diberikan sebuah fungsi f yang terdefinisi pada interval berhingga $[a, b]$. Selanjutnya kita tertarik untuk mengevaluasi integral tentu

$$\int_a^b f(x)dx, \tag{1}$$

dengan asumsi bahwa f dapat diintegralkan. Beberapa alasan mengharuskan digunakannya integrasi secara numerik untuk mengaproksimasi (1). Integrasi secara numerik, yang dikenal juga dengan *quadrature*, merupakan suatu materi yang dibahas pada mata kuliah metode/analisa numerik, yang merupakan mata kuliah wajib di semua jurusan matematika. Secara rinci penyajian integrasi numerik sering dimulai dengan aturan trapesium kemudian dilanjutkan dengan aturan Simpson.

Untuk mengaproksimasi integral (1), diaproksimasi $f(x)$ dengan garis lurus yang menghubungkan titik $(a, f(a))$ dengan $(b, f(b))$,

$$f(x) \approx \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a).$$

Dengan mengintegralkan garis lurus ini dari a ke b diperoleh aturan trapesium

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b)) =: T_R.$$

*Presented at SEMIRATA BKS PTN Wilayah Barat, held at the Syiah Kuala University, Banda Aceh, 4-5 Mei 2009

Bila diaproksimasi $f(x)$ dengan fungsi konstan $f((a+b)/2)$, kemudian diintegralkan dari a ke b diperoleh aturan titik tengah

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f\Big(\frac{a+b}{2}\Big) =: M_R.$$

Dalam penyajian aturan Simpson, yang merupakan salah satu Newton-Cotes formula, disajikan dengan menggunakan polinomial Lagrange berorde dua dengan panjang selang yang sama, $p_2(x)$, untuk mengaproksimasi $f(x)$ pada $[a,b]$. Misalkan $c=(a+b)/2$, dan $h=b-a$, maka

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \Big(\frac{(x-c)(x-b)}{(a-c)(a-b)}f(a) + \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}f(c) + \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}f(b)\Big)dx. \tag{2}$$

Dengan menghitung integral diruas kanan diperoleh aturan Simpson

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{6}\Big(f(a) + 4f\Big(\frac{a+b}{2}\Big) + f(b)\Big) \tag{3}$$

Teknis penyajian di seperti ini dapat dilihat pada Atkinson(1989), Burden dan Faires (1993), Conte and de Boor (1980), Friedman dan Kandel (1993), Gerald dan Wheatly (1994), Hildebrand (1987), Hoffman (2001), Isaacson dan Keller (1994), James et. all. (1993), Kahaner et. all. (1989), Kincaid dan Cheney (1991), Kiusalaas (2000), Maron dan Lopez (1991), Mathew dan Fink (1999), Moursund (1967), Nakamura (1993), Patel (1994), Phillips dan Taylor (1996), Quarteroni et. all. (2000), Ralston dan Rabinowitz (1978), Rice (1993), scheid (1968), Steward (1996), Stoer dan Bulirsch (1980), Suli dan Mayer (2003), dan Young dan Gregory (1988) [1, 3, 4, 7, 8, 11, 12, 15, 16, 17, 19, 20, 22, 23, 24, 25, 27, 26, 29, 30, 31, 33, 34, 36, 37, 38].

Pada artikel ini disajikan beberapa teknis penurunan metode Simpson selain dari menggunakan interpolasi Lagrange sebagaimana (2). Dalam penyajian notasi yang sama disetiap bagian boleh jadi mempunyai arti yang berbeda pada bagian lain.

2 Penurunan Alternatif Aturan Simpson

2.1 Penurunan Aturan Simpson: Metode Bobot Taktentu

Untuk menurunkan aturan Simpson dalam mengaproksimasi $\int_a^b f(x)dx$ dengan metode bobot taktentu [2, 9, 15, 16, 19, 34, 38], akan ditentukan bobot w_0, w_1 dan w_2 sedemikian hingga

$$\int_a^b f(x)dx = w_0 f(a) + w_1 f\Big(\frac{a+b}{2}\Big) + w_2 f(b) \tag{4}$$

eksaks untuk sebarang polinomial yang berorde dua atau lebih kecil dari dua. Dengan memisalkan $h=b-a$ dan mensubsitusikan $f(x)=1$, $f(x)=(x-\frac{a+b}{2})$, $f(x)=(x-\frac{a+b}{2})^2$ secara berturut-turut ke (4), diperoleh

$$\begin{aligned} h &= w_0 + w_1 + w_2 \\ 0 &= -\frac{h}{2}w_0 + \frac{h}{2}w_2 \\ \frac{h^3}{12} &= \frac{h^2}{4}w_0 + \frac{h^2}{4}w_2. \end{aligned}$$

Penyelesaian dari sistem ini adalah

$$w_0 = \frac{h}{6}, \quad w_1 = \frac{4h}{6} \quad w_2 = \frac{h}{6}$$

Dengan demikian diperoleh aturan Simpson

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{6}\Big(f(a) + 4f\Big(\frac{a+b}{2}\Big) + f(b)\Big) \tag{5}$$

2.2 Penurunan Aturan Simpson: Ekspansi Taylor

Ide penurunan formula aturan Simpson ini berasal dari referensi [32]. Andaikan f memenuhi hipotesa teorema Taylor pada $[a,b]$. Misalkan $m = (a+b)/2$, $h = b-a$, dan untuk sebarang $x \in [a,b]$, ekspansikan $f(x)$ dalam deret Taylor sekitar m. Pengintegralan kedua ruas terhadap x pada $[a,b]$ diperoleh aturan titik tengah

$$\int_a^b f(x)dx = hf(m) + \frac{h^3}{2^2 3!}f''(m) + \frac{h^5}{2^4 5!}f^{(4)}(m) + \cdots \tag{6}$$

Selanjutnya dengan menggunakan ekspansikan Taylor yang sama untuk menyatakan $f(a)$ dan $f(b)$ sekitar m, kemudian menghitung $(f(a)+f(b))/2$ dan menyelesaikan untuk $f(m)$ diperoleh

$$f(m) = \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{h^2}{2^2 2!}f''(m) + \frac{h^4}{2^4 4!}f^{(4)}(m) + \cdots \tag{7}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (7) ke persamaan (6) dan mengumpulkan pangkat yang bersesuaian dari h diperoleh aturan trapesium

$$\int_a^b f(x)dx = h\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{2h^3}{2^2 3!}f''(m) - \frac{4h^5}{2^4 5!}f^{(4)}(m) - \cdots \tag{8}$$

Perhatikan bahwa koefisien $f''(m)$ dari persamaan (8) adalah dua kali koefisien dari $f''(m)$ persamaan (6). Jadi dengan mengalikan kedua ruas persamaan (6) dengan dua dan menjumlahkannya dengan persamaan (8) dan menyederhanakan diperoleh aturan Simpson berikut

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{6}(f(a) + 4f(m) + f(b)) - \frac{h^5}{2^3 3\cdot 5!}f^{(4)}(m) - \frac{h^7}{2^5 3\cdot 7!}f^{(6)}(m)\cdots. \tag{9}$$

2.3 Penurunan Aturan Simpson: Kombinasi T_R dan M_R

Sebagaimana diketahui bahwa aturan trapesium dan titik tengah untuk mengapproksimasi $\int_a^b f(x)dx$ diberikan oleh

$$T_R = \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b)),$$

dan

$$M_R = (b-a)f\Big(\frac{a+b}{2}\Big).$$

Forsythe et. all (1977), Phillips dan Taylor (1996) dan Süli dan Mayers (2003) [6, 27, 37] menjelaskan secara analitik bahwa aturan Simpson dapat diperoleh dari kombinasi linear T_R dan M_R. Horwitz(1993) [13] menyajikan teknis kombinasi T_R dan M_R ini untuk aturan Simpson yang diperluas menggunakan polinomial, yang berlaku juga untuk aturan Simpson tanpa diperluas , yaitu

$$\begin{aligned} S_R &= \frac{1}{3}(T_R + 2M_R) \\ &= \frac{1}{3}\Big(\frac{(b-a)}{2}(f(a)+f(b)) + 2(b-a)f\Big(\frac{a+b}{2}\Big)\Big) \\ &= \frac{(b-a)}{6}\Big(f(a) + 4f\Big(\frac{a+b}{2}\Big) + f(b)\Big). \end{aligned} \tag{10}$$

Penurunan aturan Simpson dapat juga dilakukan melalui kombinasi konvek aturan trapesium dan aturan titik tengah, melalui simulasi numerik. Teknisnya adalah dengan menyajikan aturan Simpson sebagai berikut:

$$S_{RTM} = (1-\alpha)T_R + \alpha M_R, \quad \text{dengan} \quad \alpha \in (0,1). \tag{11}$$

Sebagaimana diketahui aturan Simpson adalah eksak untuk polinomial Kubik. Jadi untuk mendapatkan α agar formula (11) eksaks untuk polinomial kubik dilakukan simulasi dengan mengambil beberapa nilai $\alpha \in (0,1)$. Nilai α yang menghasilkan $|\int_a^b x^3 dx - S_{RTM}| = 0$ merupakan α yang terbaik. Akan tetapi karena kita melakukan simulasi, nilai α terbaik diperoleh bila

$$\min_{\alpha\in(0,1)} \Big|\int_a^b x^3 dx - S_{RTM}\Big|. \tag{12}$$

Pertama-tama dilakukan simulasi untuk 100 nilai $\alpha \in (0,1)$, kemudian diambil interval terkecil yang memuat α 'terbaik', katakan $[d_1, d_2]$. Kemudian dilakukan lagi simulasi untuk 1000 nilai $\alpha \in (d_1, d_2)$. Dari simulasi ini diperoleh interval yang memuat α 'terbaik', katakan $[e_1, e_2]$. Pada interval terakhir yang memuat α 'terbaik' dilakukan simulasi untuk 10000 nilai $\alpha \in (e_1, e_2)$. Hasil simulasi terakhir pada interval ini memperoleh nilai $\alpha = 0.66666 = 2/3$ yang membuat (12) minimum. Jadi diperoleh

$$S_{RT} = \frac{1}{3}T_R + \frac{2}{3}M_R, \tag{13}$$

yang tidak lain adalah aturan Simpson yang telah diperoleh pada (10).

2.4 Penurunan Aturan Simpson: Kombinasi Aturan Trapesium

Metode integrasi Romberg yang detailnya dapat rujuk pada Atkinson (1989), Buchanan dan Turner (1992), Burden dan Faires (1993), Forsythe et. all. (1977), Friedman dan Kandel (1993), Gerald dan Wheatly (1994), Henrici (1964) Hildebrand (1987), Hoffman (2001), James et. all. (1993), Kincaid dan Cheney (1991), Kiusalaas (2000), Maron dan Lopez (1991), Mathew dan Fink (1999), Moursund (1967), Nakamura (1993), Patel (1994), Phillips dan Taylor (1996), Press et. all. (1992), Quarteroni et. all. (2000), Ralston dan Rabinowitz (1978), Scheid (1968), Stoer dan Bulirsch (1980), Suli dan Mayer (2003), dan Young dan Gregory (1988) [1, 2, 3, 4, 7, 8, 10, 11, 12, 16, 19, 20, 22, 23, 24, 25, 27, 26, 28, 29, 30, 33, 36, 37, 38], memberikan ide bagaimana aturan Simpson dapat diturunkan dari kombinasi aturan trapesium.

Untuk mengaproksimasi integral (1) dipartisi interval $[a,b]$ dengan partisi $[a,m]$ dan $[m,b]$, dengan $m = (a+b)/2$. Selanjutnya diperoleh penerapan aturan trapesium pada interval $[a,b]$, $[a,(a+b)/2]$ dan $[(a+b)/2, b]$ secara berturut-turut adalah

$$\begin{aligned}
T_R &= \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b)) \\
T_{R1} &= \frac{b-a}{4}(f(a)+f(m)) \\
T_{R2} &= \frac{b-a}{4}(f(m)+f(b)).
\end{aligned}$$

Selanjutnya kita dapat menurunkan aturan Simpson dengan

$$\begin{aligned}
S_R &= \frac{1}{3}(4(T_{R1}+T_{R2}) - T_R) \\
&= \frac{1}{3}\Big(4\Big(\frac{b-a}{4}(f(a)+f(m)) + \frac{b-a}{4}(f(m)+f(b))\Big) - \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))\Big) \\
&= \frac{(b-a)}{6}(f(a)+4f(m)+f(b))
\end{aligned} \tag{14}$$

Penurunan aturan Simpson dapat juga dilakukan melalui kombinasi dua atau lebih aturan trapesium, melalui simulasi numerik. Teknisnya adalah dengan menyajikan aturan Simpson sebagai berikut:

$$S_{RTT} = (1-\alpha_1-\alpha_2)T_R + N\alpha_1 T_{R1} + N\alpha_2 T_{R2}, \tag{15}$$

dengan $\alpha_i \in (0,1)$, $i = 1,2$, dan $N = 2$. Pengambilan bobot $N = 2$ berdasarkan bahwa T_{R1} dan T_{R2} hanya menggunakan setengah dari interval $[a,b]$. Jadi untuk mendapatkan α_1 dan α_2 agar formula (15) eksaks untuk polinomial kubik dilakukan simulasi dengan mengambil beberapa nilai $\alpha_1 \in (0,1)$ dan $\alpha_2 \in (0,1)$. Pasangan nilai $(\alpha_{1i}, \alpha_{2i})$ yang menghasilkan $|\int_a^b x^3 dx - S_{RTT}| = 0$ merupakan α_1 dan α_2 yang terbaik. Akan tetapi karena kita melakukan simulasi, pasangan nilai $(\alpha_{1i}, \alpha_{2i})$ terbaik yang diperoleh dipenuhi bila

$$\min_{\substack{\alpha_1 \in (0,1) \\ \alpha_2 \in (0,1)}} \Big|\int_a^b x^3 dx - S_{RTT}\Big|. \tag{16}$$

Pertama-tama dilakukan simulasi untuk 100 nilai $\alpha_1 \in (0,1)$, dan $\alpha_2 \in (0,1)$ sehingga diperoleh 10000 pasang nilai $(\alpha_{1i}, \alpha_{2i})$ yang mungkin. Kemudian diambil interval terkecil yang memuat α_1, α_2 'terbaik', yaitu $[0.6, 0.8] \times [0.6, 0.8]$. Kemudian dilakukan lagi simulasi untuk 1000 nilai $\alpha_1 \in (0.6, 0.8)$

dan $\alpha_2 \in (0.6, 0.8)$. Dari hasil simulasi ini diperoleh nilai $\alpha_1 = 0.6666 = 2/3$ dan $\alpha_2 = 0.6666 = 2/3$ yang membuat (16) minimum. Jadi diperoleh

$$\begin{aligned} S_{RTT} &= 2\frac{2}{3}T_{R1} + 2\frac{2}{3}T_{R2} - \frac{1}{3}T_R \\ &= \frac{1}{3}(4(T_{R1} + T_{R2}) - T_R) \end{aligned} \tag{17}$$

yang tidak lain adalah aturan Simpson yang telah diperoleh pada (14).

3 Pengembangan Selanjutnya

Ide penurunan aturan Simpson$_{\frac{1}{3}}$ secara simulasi numerik seperti (15) dengan menyajikan aturan Simpson$_{\frac{1}{3}}$ sebagai kombinasi konveks aturan trapesium juga dapat dikembangkan untuk aturan Simpson$_{\frac{3}{8}}$. Misalkan akan diaproksimasi $\int_a^b f(x)dx$. Selanjutnya misalkan $h = (b-a)/3$ dan partisi $[a, b]$ menjadi 3 partisi, $[a, a+h]$, $[a+h, a+2h]$, $[a+2h, b]$. Selanjutnya sajikan aturan Simpson$_{\frac{3}{8}}$ dengan

$$S_{\frac{3}{8}} = (1-\alpha)T_E + N\alpha T_M, \quad N = 3, \tag{18}$$

dengan T_E adalah penerapan aturan trapesium untuk interval $[a, b]$ dan T_M adalah penerapan aturan trapesium untuk interval $[a+h, a+2h]$. Tahapan berikutnya lakukan simulasi untuk mendapatkan α terbaik seperti yang telah dilakukan untuk penurunan Simpson$_{\frac{1}{3}}$ secara numerik.

Teknis penurunan yang hampir sama dengan sajian diatas telah dilakukan Supriadi dan Imran(2005) [35], yaitu dengan menyajikan

$$S_{\frac{3}{8}} = \beta((1-\alpha)T_E + \alpha T_M). \tag{19}$$

Dalam sajian (19) dilakukan simulasi untuk mendapatkan $\beta \in [0, 5]$ dan $\alpha \in (0, 1)$.

Penurunan secara simulasi numerik dapat juga dikembangkan untuk metode numerik yang lain yang sudah dikenal seperti untuk aturan Boole berikut:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{2h}{45}\Big(7f(a) + 32f(a+h) + 12f\Big(\frac{a+b}{2}\Big) + 32f(b-h) + 7f(b)\Big) = B_R \tag{20}$$

dengan $h = (b-a)/4$. Teknisnya dengan menyajikan aturan Boole (20) dengan

$$B_R = (1 - \alpha_1 - \alpha_2)T_E + N_1\alpha_1 T_M + N_2\alpha_2 M_R, \quad N_1 = N_2 = 2, \tag{21}$$

dalam hal ini T_E adalah penerapan aturan trapesium untuk interval $[a, b]$, T_M adalah penerapan aturan trapesium untuk interval $[a+h, b-h]$ dan M_R adalah penerapan aturan titik tengah untuk interval $[a, b]$. Kombinasi lain dalam menurunkan aturan Boole secara numerik juga mungkin dilakukan.

Teknis yang dikemukakan pada artikel ini menyaratkan panjang interval yang sama dalam mengkombinasikan aturan trapesium dan aturan titik tengah, dan mengkombinasikan aturan trapesium. Pengkombinasian aturan trapesium dan aturan titik tengah, dan mengkombinasikan arutan trapesium untuk panjang interval yang berbeda 'mungkinkah' membawa kita ke penurunan aturan integrasi lain yang sudah dikenal/maupun belum dikenal. Hal ini dapat dicoba oleh pembaca.

4 Catatan Kepustakaan

Beberapa penurunan lain dari aturan Simpson dengan memperhatikan error yang terjadi diberikan oleh Lampert(2007) [21]. Penurunan metode integrasi secara simbolik dengan menggeser titik simpul diberikan oleh Kendig(1999)[18]. Literatur utama yang memuat lebih dari 1500 referensi tentang berbagai metode integrasi disajikan oleh Davis and Rabinowitz(1984)[5].

Pustaka

[1] Atkinson, K. E. 1989. An Introduction to Numerical Analysis. Second Edition. John Wiley & Son, New York.

[2] Buchanan J., L., dan Turner, P. R. 1992. Numerical Methods and Analysis. McGraw Hill, New York.

[3] Burden R.L dan Faires, J. D. 1993. Numerical Analysis, 5^{th} Ed., PWS, Boston.

[4] Conte, S. D. dan de Boor C. 1980. Elementary Numerical Analysis: An Algorithmic Approach, Third Edition, McGraw-Hill Book Company, New York.

[5] Davis P. J. dan Rabinowitz P. 1984. Methods of Numerical Integrations, 2^{nd} Ed. San Diego, California.

[6] Forsythe, G.E., Malcolm M. A. and Moler C. B. 1977. Computer Methods for Mathematical Computations, Prentice Hall Inc., New Jersey.

[7] Friedman, M. dan Kandel, A. 1993. Fundamentals of Computer Numerical Analysis. CRC Press, Boca Raton.

[8] Gerald, C., F., and Wheatly, P. O. 1994. Applied Numerical Analysis, 5^{th} Ed., Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Masachussetts.

[9] Hamming, R. H. 1973. Numerical Method for Scientists and Engineers. McGraw-Hill Inc. New York. Republished by Dover, New York.

[10] Henrici, P. 1964. Element of Numerical Analysis. John Wiley & Son, New York.

[11] Hildebrand, F. B. 1987. Introduction to Numerical Analysis. McGraw-Hill Inc. New York. Republished by Dover, New York.

[12] Hoffman J. D. 2001. Numerical Methods for Engineers and Scientists Second Edition, Marcel Dekker, Inc. New York.

[13] Horwitz, A. 1993. A Generalization of Simpson's Rule. *Approx. Theory & Appl.* **9**. 2. h. 71–80.

[14] Householder, A. S. 1953. Principles Of Numerical Analysis. Mcgraw-Hill, Inc. New York

[15] Isaacson, E. dan Keller H. B. 1994. Analysis of Numerical Methods. John Wiley & Son, New York. Republished by Dover, New York.

[16] James M. L. Smith G.M. and Wolford J. C. 1993. Applied Numerical Methods for Digital Computation. HarperCollins College Publisher, New York, 1993.

[17] Kahaner, D., Moler, C., dan Nash, S. 1989. Numerical Methods and Software. Prentice Hall, New Jersey

[18] Kendig, K. 1999. Picture Suggest How to Improve Elementary Numerical Integration. *The College Mathematics Journal.* **30**(1): 45–50.

[19] Kincaid, D., dan Cheney, W. 1991. Numerical Analysis: Mathematics of Scientific Computing. Brooks Cole Publishing Company, California.

[20] J. Kiusalaas. 2005. Numerical Methods in Engineering with MATLAB. Cambridge University Press, Cambridge, UK.

[21] Lampert, V. 2007. A Comparison between Derivations of Hermite's and Simpson's rule. *Int. Journal of Math. Analysis.* Vol. 1(2), number 12, 583–602.

[22] Maron, M. J. dan Lopez, R. L. 1991. Numerical Analysis: A Practical Approach, 3^{th} Ed., Warsworth Publishing Company, Belmort, California.

[23] Mathew, J.H. dan Fink, K. D. 1999. Numerical Methods Using Matlab. 3^{nd} Ed., Prentice Hall Inc., New Jersey.

[24] Moursund D. G. and Duris C. S. 1967. Elementary Theory and Application Numerical Analysis, McGraw-Hill Inc. New York. Republished by Dover, New York.

[25] Nakamura, S. 1993. Applied Numerical Method in C, Prentice Hall Inc., New Jersey.

[26] Patel, V. A. 1994. Numerical Analysis, Saunders College Publishing, Orlando.

[27] G. M. Phillips dan Taylor. P. J. 1996. Theory and Application to Numerical Analysis. Academic Press, San Diego, California, USA.

[28] Press, W., H., et al. 1992. Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing, 2^{nd} Ed., Cambridge University Press, New York.

[29] Quarteroni, A. Sacco R. and Saleri F. 2000. Numerical Mathematics, Springer-Verlag Inc. New York.

[30] Ralston A. and Rabinowitz P. 1993. A First Course in Numerical Analysis, Software and Analysis, 2^{nd} Ed., Academic Press Inc., Boston.

[31] Rice, J. R. 1993. Numerical Methods, Software and Analysis, 2^{nd} Ed., Academic Press Inc., Boston.

[32] Richardson, G. P. 1988. Reconsidering Area Approximations. *Amer. Math. Monthly.* **95**: 754–757.

[33] Scheid, F. 1968. Theory and Problems of Numerical Analysis, McGraw-Hill Book Company, New York.

[34] Steward, G. W. 1996. Afternotes on Numerical Analysis, SIAM, Philadelphia, Pennsylvania.

[35] Putra, S. dan Imran, M. 2005. Strategi Baru Penerapan Aturan Trapesium. *Jurnal Natur Indonesia.* 7. 2. h. 99–102.

[36] Stoer J., dan Bulirsch, R, Introduction to Numerical Analysis, Springer Verlag, New York, 1980.

[37] Süli, E. dan Mayers. D. F. 2003. An Introduction to Numerical Analysis. Cambridge University Press, Cambridge.

[38] Young, D. M. dan Gregory, R. T. 1988. A Survey of Numerical Mathematics, Vol I, Dover, New York.

SEMINAR DAN RAPAT TAHUNAN BIDANG ILMU MIPA
BADAN KERJASAMA PTN WILAYAH BARAT
(SEMIRATA BKS-PTN B) TAHUN 2009
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS SYIAH KUALA
BANDA ACEH, 4 – 5 MEI 2009

BKS PTN BARAT
Bidang Ilmu MIPA

SURAT KETERANGAN

No: 251/ SEMIRATA-22.K/V/2009

Panitia Seminar dan Rapat Tahunan Badan Kerjasama Perguruan Tinggi Negeri Wilayah Barat (SEMIRATA BKS PTN-B) Bidang Ilmu MIPA Tahun 2009, di Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Syiah Kuala menerangkan:

Nama	: Dr. M. Imran, M.Si
Instansi	: Universitas Riau
Judul	: Beberapa Penurunan Metode Integrasi Numerik: Aturan Simpson

Benar yang namanya tersebut di atas telah mempresentasikan makalahnya pada acara Seminar dan Rapat Tahunan BKS PTN-B Bidang Ilmu MIPA Tahun 2009.

Demikian surat keterangan ini dibuat agar dapat digunakan seperlunya.

Ketua Panitia,

Dr. Syahrun Nur Madjid, M.Si
NIP. 132 090 408

Note HP Sekretariat (0651-710223)

Sekretariat : FMIPA Unsyiah, Jl. Syech A.Rauf No. 1. Darussalam, Banda Aceh, 23111
Telp./Fax. : (0651) 7551381, Email: semiratamipa2009@unsyiah.ac.id Website: fmipa.usk.ac.id/semiratamipa2009
http://www.semiratamipa2009.org