RENTANG NUMERIK UNTUK FUNGSI EKSPONENSIAL MATRIKS

M.Natsir, Musraini
Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Riau
Email: natsir100@gmail.com

ABSTRAK

Suatu eksponensial matriks A dirielkan dalam bentuk $e^A = \frac{A^k}{k!}$ dengan $A \in C^{nxn}$ dan rentang numerik dari e^{At} didefinisikan dengan $W(E_A) = \{t \in C : 0 \in F(e^{At})\}$ dengan $E_A(t) = e^{At}, t \in C$ ada makalah ini dianalisis sifat-sifat dasar dari $W(E_A)$, serta analisis kasus untuk A Hermitian dan Skew Hermitian

Kata kunci *:* fungsi eksponensial matriks , rentang numerik

PENDAHULUAN.

Eksponensial matriks merupakan deret dari fungsi eksponensial yang konstantanya diganti menjadi matriks A berukuran $n \times n$, sehingga terbentuklah deret matriks A berukuran $n \times n$.

Suatu deret matriks dapat diperluas berdasarkan. Teorema Cayley-Hamilton yang menguraikan polynomial nilai eigen dari suatu matriks A kedalam bentuk polinomial matriks A_{nxn}.

Rentang numerik dari suatu matriks secara umum telah menjadi topik penelitian yang luas selama setiap dekade yang mengungkapkan banyak informasi tentang matriks. Rentang numerik $F(A)$ dari matriks $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ adalah himpunan kompak dan konvex

$$F(A) = \{x^*Ax \in \mathbb{C} : x \in \mathbb{C}^n, x^*x = 1\}$$
$$= \{\mu \in \mathbb{C} : \| A - \lambda I_n \|_2 \geq |\mu - \lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C}\},$$

dengan $\|.\|_2$ menunjukkan norm spektral matriks Definisi untuk $F(A)$ dianalisis di [9] dengan $F(A)$ memuat semua nilai eigen dari A.

Rentang numerik dari polinomial matriks dibahas secara ekstensif di [8] ,
Jika $P(\mu) = A_m\mu^m + A_{m-1}\mu^{m-1} + \cdots + A_0$ adalah $n \times n$ matriks polinomial, maka rentang numerik dari $P(\mu)$ didefinisikan sebagai

$$W(P) = \{\mu \in \mathbb{C} : 0 \in F(P(\mu))\}.$$

Untuk analisis fungsi dari matriks difokuskan pada fungsi eksponensial e^{At}, di mana $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ dan $t \in \mathbb{C}$

Untuk $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, eksponensial dari A didefinisikan sebagai

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!},$$

Penelitian ini bersifat studi literatur dengan menelusuri lebih mendalam dari hasil penelitian **Christos Chorianopoulos** dan **Chun Hua Guo** (2016) tentang **Rentang Numerik**

Untuk Fungsi Eksponensial Matriks dan beberapa artikel lainnya yang terkait dengan fungsi eksponensial matriks dan rentang numerik .

KAJIAN LITERATUR DAN MATERI PENDUKUNG

Dibagian ini dijelaskan pengertian nilai eigen dan vektor eigen untuk menjelaskan teorema Cayley-Hamilton.

Definisi 1 [5].

Skalar λ disebut nilai eigen, bila $AX=\lambda x$ untuk $x \neq 0$ dengan matriks A $n \times n$ dan X adalah vektor eigen. Selanjutnya dapat dibentuk

$(\lambda I - A)X = 0$ dan $\det(\lambda I - A) = 0$, dperoleh nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$

(1)

Definisi 2 [5].

Jika $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ adalah nilai-nilai eigen dari matriks A ordo $n \times n$,maka dapat dibentuk polinomial nilai eigen,

$$P(\lambda) = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + c_1\lambda + c_0 \qquad (2)$$

Teorema 1 [5]

Misalkan A matriks $n \times n$ dan $\lambda_1=\lambda_2=....=\lambda_n$ adalah nilai-nilai eigennya. Dan Jika polynomial nilai eigen matriks A : $P(\lambda) = \det(\lambda I - A) = a_0+a_1\lambda+a_2\lambda^2+.....+a_{n-1}\lambda^{(n-1)}+\lambda^n$ Maka diperoleh

$$P(\lambda) = a_0 I+a_1 A+a_2 A^2+.....+A^n = 0 \qquad (3)$$

Teorema 2 [8]

Jika A matriks konstan $n \times n$ konstan dengan polynomial karakteristik $P(\lambda)$, maka eksponensial matriksnya adalah:

$$e^{At} = x_1(t)I + x_2(t)A + x_3(t)A^2 + \cdots$$
$$+ x_n(t)A^{(n-1)}$$

dengan,

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = B_0^{-1} \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \\ \vdots \\ \varphi_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

B_0 adalah matriks untuk $t = 0$ dan $S = \{\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)\}$ merupakan basis solusi sistem persamaan differensial homogen yang persamaan karakteristiknya adalah persamaan karakteristik dari matriks A dengan $p(\lambda) = 0$. Penelusuran Literature tentang materi yang berkaitan dengan eksponen matriks memberikan informasi yang diperlukan dalam menganalisis perumusan dari eksponen matriks baik dari segi penelaahan nilai eigen dari matriks A tersebut maupun tinjauan tentang solusi dari sistem persamaan diferensial linier yang dibangun oleh A_{nxn} sebagai matriks koefisien sistem linier tersebut

METODOLOGI

Penelitian ini berbentuk studi literatur dengan menelusuri beberapa buku teks dan journal terkait untuk menganalisa lebih lanjut tentang penyelesaian persamaan eksponensial dan rentang numerik dari suatu matriks dengan pendekatan dan langkah-langkah berikut :

A. Tentukan nilaieigen λ_1 , λ_2 , …. , λ_n dari matriks A yang diketahui .

B. Formulasikan

$$x(t) = e^{At} x_o = \sum_{k=0}^{n} Z_k e^{\lambda_k t} x_o$$

$$dengan \ Z_o = \prod_{j=1, j\neq k} \frac{(A - \lambda I_{n\,j}\}}{\lambda_k - \lambda_j}$$

dan $e^{At} = \sum_{k=1}^{n} Z_k e^{\lambda_k t}$

C. Rumuskan

$$x(t) = [\, I + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A - \lambda I)^k}{k!} t^k \,] e^{\lambda t} x_o$$

Perumusan tentang eksponensial dari suatu matriks persegi dijabarkan melalui perluasan fungsi matriks A yang mempunyai eigen value λ_1 , λ_2 , λ_3 , …….., λ_n yang diformulasikan dalam bentuk :

$$F(A) = \frac{(A - \lambda I)}{(\lambda_1 - \lambda_2)} F(\lambda_1\} + \frac{(A - \lambda_2 I)}{(\lambda_2 - \lambda_1)} F(\lambda_2) ,$$

untuk matriks A_{2x2}

$$F(A) = \frac{(A - \lambda_2 I)(A - \lambda_3 I\}}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)} f(\lambda_1)$$
$$+ \frac{(A - \lambda_3 I)(A - \lambda_1 I)}{(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_1)} F(\lambda_2)$$
$$+ \frac{(A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I)}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)} F(\lambda_3)$$

untuk matriks A_{3x3}

D. Telaah Sifat – Sifat $W(E_A)$.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Eksponensial Matriks

Perumusan tentang eksponensial dari suatu matriks persegi sebelumnya dijabarkan melalui perluasan fungsi matriks A yang mempunyai eigen value λ_1 , λ_2 , λ_3 , …….., λ_n yang diformulasikan dalam bentuk :

$$e^{At} = \sum_{k=1}^{n} Z_k e^{\lambda_k t}$$

$$x(t) = e^{At} x_o = \sum_{k=0}^{n} Z_k e^{\lambda_k t} x_o$$

dan

$$dengan \ Z_o = \prod_{j=1, j\neq k} \frac{(A - \lambda I_{n\,j}\}}{\lambda_k - \lambda_j}$$

Sebagai ilustrasi , Selesaikan persamaan

$x^! = Ax$, dengan

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} , \ x_o = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Diperoleh $c(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$. menghasilkan $\lambda = \{ -1 \ , \ -2 \}$

Maka

$$Z_1 = \frac{A - \lambda_2 I}{\lambda_1 - \lambda_2} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \ ;$$

$$Z_1 x_o = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$Z_2 = \frac{A - \lambda_1 I}{\lambda_2 - \lambda_1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \ ;$$

$$Z_2 x_o = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Sehingga penyelesaian dari persamaan $x' = Ax$ adalah

$$x(t) = \sum_{k=1}^{2} Z_k e^{\lambda_k t} x_o = e^{-t} Z_1 x_o + e^{-2t} Z_2 x_o$$

$$= e^{-t}\begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix} + e^{-2t}\begin{bmatrix} -3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Jika dibandingkan dengan cara biasa , dari nilaieigen $\lambda = \{ -1 \ , \ -2 \}$ diperoleh matriks P yang dibentuk oleh eigenvektor $[v_1 \ , v_2]$,

sehingga $P = [v_1 \ , v_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$,

$$P^{-1} x_o = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix},$$

diperoleh hubungan $Z_1 x_o = c_1 v_1$
dan $Z_2 x_o = c_2 v_2$

Jadi solusi persamaan

$$x(t) = P e^{\Lambda t} P^{-1} x_o$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$= 4\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-t} - 3\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} e^{-2t}$$

Rentang numerik $F(A)$ dari matriks $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ adalah himpunan kompak dan konvex

$$F(A) = \{x^* A x \in \mathbb{C} : x \in \mathbb{C}^n, x^* x = 1\}$$
$$= \{\mu \in \mathbb{C} : \| A - \lambda I_n \|_2 \geq |\mu - \lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C}\},$$

dengan $\|.\|_2$ menunjukkan norm spektral matriks Definisi untuk $F(A)$ dianalisis di [11] serta $F(A)$ memuat semua nilai eigen dari A. Rentang numerik dari polinomial matriks dibahas secara intensif di [4]

Jika $P(\mu) = A_m\mu^m + A_{m-1}\mu^{m-1} + \cdots + A_0$ adalah $n \times n$ matriks polinomial, maka rentang numerik dari $P(\mu)$ didefinisikan sebagai

$W(P) = \{\mu \in \mathbb{C} : 0 \in F(P(\mu))\}$.

Untuk analisis fungsi dari matriks difokuskan pada fungsi eksponensial e^{At}, di mana $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ dan $t \in \mathbb{C}$

Untuk $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, eksponensial dari A didefinisikan sebagai

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!},$$

RENTANG NUMERIK .

Rentang Numerik pada operator T merupakan himpunan bagian dari bilangan kompleks C yang didefinisikan dalam bentuk :

$W(T) = \{(Tx,x), x \in H, \|x\| = 1\}$

Sifat-sifat dari W(T) memenuhi :

$W(\alpha I + \beta T) = \alpha + \beta W(T)$ $, untuk\ \alpha, \beta \in C$

$W(T^*) = \{\tilde{\sigma}, \sigma \in W(T)\}$

$W(U^*TU) = W(T)$ $\quad untuk\ suatu\ matriks\ Unitary\ U$

Sebagai ilustrasi , Misalkan matriks A ditransformasi :

$C^2 \to C^2$ yang direpresentasikan oleh

$$A = \begin{bmatrix} r & b \\ 0 & -r \end{bmatrix}, r \in R, b \in C$$

Dan misalkan (f,g) merupakan vektor satuan dalam C^2 $, f = e^{i\alpha} Cos\,\theta$ $, g = e^{i\beta} Sin\,\theta$

$$\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \beta \in [0, 2\pi]$$

Diperoleh :

$Af = (r\, e^{i\alpha} Cos\,\theta + b\, e^{i\beta} Sin\,\theta, -re^{i\beta} Sin\,\theta)$

Dan $(Af, f) = r(Cos^2\theta - Sin^2\theta\})$

$+\, b^{i(\beta-\alpha)} Sin\,\theta\ Cos\,\theta$ = x + iy $\quad x = rCos\,2\theta + \frac{|b|}{2} Sin\,2\theta\ Cos(\beta - \alpha + \gamma)$

y = $\frac{|b|}{2} Sin\,2\theta\ Cos(\beta - \alpha + \gamma)\ Sin\,2\theta$,

$\gamma = \arg b$

Diperoleh persamaan :

$(x - r\,COs\,2\theta)^2 + y^2 = \frac{\|b\|^2}{4} Sin^2\emptyset$, dengan $0 \le \emptyset \le \pi$

Yang merupakan himpunan lingkaran

Bentuk persamaan :

$$(x - r\,COs\,2\theta)^2 + y^2 = \frac{\|b\|^2}{4} Sin^2 2\theta$$

Dapat dinyatakan dalam bentuk :

$(x - r\ COs\ 2\theta)^2 + y^2 = \frac{\|b\|^2}{4} Sin^2 2\theta$

Diferensialkan ke w,r,t ,∅, diperoleh :

$(x - r\ Cos\ \theta)r = \frac{\|b\|^2}{4} Cos\ \emptyset$

Dengan mengeliminasi kedua persamaan diperoleh :

$$\frac{x^2}{r^2 + (\frac{|b|^2}{4})} + \frac{y^2}{\left(\frac{|b|^2}{4}\right)} = 1$$

Yang merupakan ellips dengan pusat 0 , sumbu minor b dan sumbu may$\sqrt{4r^2 + b^2}$or

Perumusan tentang rentang numerik matriks eksponensial ditelaah berdasarkan difinisi berikut :

Untuk suatu $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, misalkan

$E_A(t) = e^{At}$, $t \in \mathbb{C}$, rentang numerik $dari\ E_A(t)$ didefinisikan sebagai berikut :

Definisi 3 [2]

Rentang numerikal dari $E_A(t)$ adalah

$$W(E_A) = \{t \in \mathbb{C} : 0 \in F(e^{At})\} \tag{4}$$

dan memenuhi :

$$W(E_A) = \left\{ \begin{matrix} t \in \mathbb{C}: x^* e^{At} x = 0, \\ \text{untuk suatu x } \neq 0 \text{ dan } x \in \mathbb{C}^n \end{matrix} \right\}$$

$\{t \in \mathbb{C} : \| e^{At} - \lambda I_n \|_2 \geq |\lambda| \ \forall\ \lambda' \in \mathbb{C}\}$. (4)

Teorema 3.

Misalkan $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$.maka $W(E_A)$ tidak kosong jika dan hanya jika A bukan matriks skalar.

Bukti.

Jika A adalah matriks skalar ($A = cI_n$ untuk suatu c kompleks), maka

$W(E_A)$ adalah kosong karena $F(e^{At}) = \{e^{ct}\}$ dan jelas $\{e^{ct}\} \neq 0$.

Misalkan A bukan matriks skalar,Akan dutunjukkan $W(E_A)$ tidak kosong dengan induksi pada ukuran n dari A.

Ambil U suatu matriks unitary sedemikian hingga $A = U * RU$ dan R adalah matriks segitiga atas. Diperoleh $e^{At} = U^* e^{Rt} U$, sedemikian hingga $F(e^{At}) = F(e^{Rt})$ untuk setiap $t \in \mathbb{C}$. Oleh karena itu $W(E_A) = W(E_R)$. Sehingga A merupakan matriks segitiga atas.

Misalkan A matriks kompleks 2 × 2

$\begin{bmatrix} \lambda_1 & a \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$. diperoleh $e^{At} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & a\frac{e^{\lambda_2 t} - e^{\lambda_1 t}}{\lambda_2 - \lambda_1} \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}$ dengan $\lambda_1 \neq \lambda_2$; jika $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ maka

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & e^{\lambda t} at \\ 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix}.$$

Jika A memiliki dua nilai eigen yang berbeda maka $F(e^{At})$ adalah konvex untuk semua t, itu sudah cukup untuk menunjukkan bahwa selalu ada t kompleks yang menghubungkan segmen garis $e^{\lambda_1 t}$ dan $e^{\lambda_2 t}$ melalui titik 0 atau dengan kata lain untuk suatu $a\ t \in \mathbb{C}$ sedemikian hingga $\rho \in (0,1)$ maka

$\rho e^{\lambda_1 t} + (1-\rho)e^{\lambda_2 t} = 0,$

Atau $e^{(\lambda_1-\lambda_2)t} = -\frac{1-\rho}{\rho}$, sehingga $e^{(\lambda_1-\lambda_2)t-(2k+1)\pi i} = -\frac{1-\rho}{\rho}$, di mana $k \in \mathbb{Z}$. Oleh karena itu, dapat dipilih t sehingga

$$t = \frac{\ln\frac{1-\rho}{\rho} + (2k+1)\pi i}{\lambda_1 - \lambda_2},$$

$$k \in \mathbb{Z} \qquad (5)$$

Jika $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, maka $F(e^{At}) = \{z \in \mathbb{C} : |z - e^{\lambda t}| \le |\frac{at}{2}||e^{\lambda t}|\}$

. Jadi, $0 \in F(e^{At})$ jika dan hanya jika $|t| \ge \frac{2}{|a|}$. Oleh karena itu $W(E_A) = \{t \in \mathbb{C} : |t| \ge \frac{2}{|a|}\}$.

Misalkan $W(E_A) \ne \emptyset$ untuk setiap matriks segitiga atas A berukuran k x k A, dengan $k \ge 2$. Jadi terdapat $t_0 \in \mathbb{C}$ sedemikian hingga $x_0^* e^{At_0} x_0 = 0$ untuk suatu $x_0 \ne 0$, $x_0 \in \mathbb{C}^k$. Untuk setiap $(k+1) \times (k+1)$ matriks segitiga atas A , Terdapat tiga kemungkinan:

$$A = \begin{bmatrix} \hat{A} & y \\ 0 & \xi \end{bmatrix}, \text{ atau } A = \begin{bmatrix} \xi & y^T \\ 0 & \hat{A} \end{bmatrix},$$

atau

$$A \begin{bmatrix} \lambda & & & a \\ & \lambda & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda \end{bmatrix}$$

dimana $y \in \mathbb{C}^k, \xi \in \mathbb{C}, a \ne 0$, dan $\hat{A}$ matriks segitiga atas berukuran $k \times k$.

- **Sifat – Sifat $W(E_A)$**

Misalkan $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Rentang numerik dari A didefinisikan dengan

$W(A) = \{x^*Ax : x \in \mathbb{C}^n, x^*x = 1\}.$ [3]

Teorema 4.

Misalkan $A \in \mathbb{C}^{n\times n}, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

$W(\alpha A + \beta I) = \alpha W(A) + \beta.$

$W(U^*AU) = W(A)$ untuk setiap Unitary $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

Misalkan $k \in \{1, \dots, n-1\} dan\ X \in \mathbb{C}^{n\times k}$ memenuhi $X^*X = I_k.$

$Maka\ \ W(X^*AX) \subseteq W(A).$

Kelas khusus dari matriks

Sifat dan karakteristik menggambarkan interaksi antara sifat-sifat geometris dari $W(A)$ dan sifat-sifat aljabar $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$.[11]

Teorema 5.

Misalkan $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

$A = \lambda I$ jika dan hanya jika $W(A) = \{\lambda\}$.

$A = A^*$ jika dan hanya jika $W(A) \subseteq IR$.

$A = A^*$ adalah definit positif jika dan hanya jika $W(A) \subseteq (0, \infty)$.

$A = A^*$ adalah semidefinite positif jika dan hanya jika $W(A) \subseteq [0, \infty)$.

Rentang numerik dari matriks Hermitian H adalah interval tertutup pada sumbu real, yang titik akhir dibentuk oleh eigen ekstrim H.

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_n \end{pmatrix} \; dengan\; a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n$$

karena $\Phi(H,x) \equiv x^*Hx \equiv \sum_{v=1}^{n} a_v x_v \overline{x_v}$. misalkan x menjadi vektor dengan komponen riel $\xi_1, \dots, \xi_n$ dengan $\xi_v^2 = 1$. Maka $\Phi(H,x) = \sum_{v=1}^{n} a_v \xi_v^2$. $\Phi(H,x)$ mengasumsikan nilai eigen ekstrim $a_1, \dots, a_n$ dari matriks diagonal H hanya untuk vektor eigen

$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $x_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ sembarang Unitary U dari persamaan yang ekuivalen

$Hx = \alpha x,\quad (U^*HU)U^*x = \alpha U^*x$

Nilai eigen ekstrim U^*HU diasumsikan hanya untuk vektor eigen dalam fungsi $\Phi(U^*HU, x)$
.

Untuk setiap matriks kompleks A dapat dibagi menjadi dua komponen sehingga

$A = H_1 i H_2,$

dimana H_1 dan H_2 adalah matriks Hermitian yang berhubungan dengan A:

$H_1 \dfrac{A + A^*}{2},\quad H_2 = \dfrac{A - A^*}{2i}$

Dari ini diperoleh $\Phi(A,x) = \Phi(H_1,x) + i\Phi(H_2,x)$.

dimana $\Phi(H_1,x)$ dan $\Phi(H_2,x)$ adalah komponen riel untuk setiap vektor x.

Teorema 6. *Misalkan* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *bukan matriks skalar dan* $t \in W(E_A)$

maka $|t| \ge \dfrac{Ln\ 2}{\inf_{k\in C} |A - kI_n|_2}$ (6)

Bukti.

Karena $t \in W(E_A)$,

$\| e^{At} - \lambda I_n \|_2 \ge |\lambda|,\quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$. Untuk $\lambda = 1$ diperoleh $\| e^{At} - \lambda I_n \|_2 \ge 1$. .

Karena $0 \in F(e^{At}), 0 \in e^{-kt} F(e^{At}) = F(e^{At - ktI_n})$, Untuk setiap $k \in \mathbb{C}$..

Oleh karena itu

$\| e^{At-ktI_n} - I_n \|_2 \le 1$ (7)

Diperoleh hubungan

$\| e^{X+Y} - e^X \|_2 \le (e^{\|Y\|_2} - 1) e^{\|X\|_2},$

di mana X, Y adalah matriks persegi dengan ukuran yang sama. Untuk $Y = At - ktI_n$ dan $X = 0$

ketaksamaan menjadi

$\| e^{At-ktI_n} - I_n \le \| e^{At-ktI_n} \|_2 - 1$ (8)

Menggabungkan ketaksamaan(7) dan (8) diperoleh $1 \le \| e^{At-ktI_n} \|_2 - 1$, atau

$\ln 2 \le |t| \; \| A - kI_n \|_2$, Ketaksamaan pada teorema (6) terbukti. Type equation here.

KESIMPULAN

Dari hasil penelitian ini diperoleh kesimpulan Fungsi eksponensial matriks diperoleh dari Solusi persamaan

$x^! = Ax$ dalam bentuk $x(t) = e^{At} x_o = e^{(A-\lambda I)t} e^{\lambda It} x_o = e^{(A-\lambda I)t} e^{\lambda t} x_o$

$$= [I + (A-\lambda I)t + (A-\lambda I)^2 \frac{t^2}{2!} + \ldots]\ e^{\lambda t} x_o$$

$$x(t) = [\, I + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A-\lambda I)^k}{k!} t^k]\, e^{\lambda t} x_o$$

Suatu rentang numerik dari operator T yang merupakan subset dari bilangan kompleks C dalam bentuk : $W(T) = \{(T_{x,x}), x \in H, \|x\|=1 \}$ diperoleh hubungan $W(\alpha I + \beta T) = \alpha + \beta W(T),$

$untuk\ \alpha, \beta \in C\ dan\ W(T^*)$

$= \{\lambda_, \ldots, \lambda_n\} \in W(T)\ serta\ W(U^*TU) = W(T)\ untuk\ suatu\ matrik\ Unitary\ U$

Untuk suatu matriks Hermitian H , maka $W(H) = \{t: \lambda_1 \leq t \leq \lambda_n \}$

dimana λ_1 dan λ_n merupakan eigen value terkecil dan terbesar dari Matriks H

dan jika $\|v\| = 1\ dan\ \|H_{v,v}\| = \lambda_n$ Maka v merupakan egenvektor yang berkoresponden dengan λ_n

DAFTAR PUSTAKA

Beckermann and L. Reichel. *Error estimates and evaluation of matrix functions via the Faber transform.* SIAM Journal on Numerical Analysis, 47:3849–3883, 2009.

Choi and C.-K. Li. Numerical ranges of the powers of an operator. Journal of Mathe-matical Analysis and Applications, 365:458–466, 2010.

Chorianopoulos, P. Psarrakos, and F. Uhlig. A method for the inverse numerical range problem. Electronic Journal of Linear Algebra, 20:198–206, 2010.

Diogo. Algebraic , Properties of the set of operators with 0 in the closure of the numerical range. Operators and Matrices, 9:83–93, 2015.

Higham.NJ , Functions of Matrices. SIAM, Philadelphia, 2008.

Horn R.A and C.R. Johnson. Topics in Matrix Analysis. Cambridge University Press, Cam-bridge, 1991.

Jack,L.G..Matrix , Theory with application. Mc Graw Hill,New York , 1991

Liz,E., A Note on the matrix exponential. SIAM Rev., 40 : 700–702 , 1998.

Leonard, I.E.., The matrix exponential. SIAM Rev., 38 : 507–512. 1996

Lancaster,P and P. Psarrakos. Normal and seminormal eigenvalues of matrix functions. Integral Equations Operator Theory, 41:331–342, 2001.

Li , C K and L. Rodman. Numerical range of matrix polynomials. SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, 15:1256–1265, 1994.

J.G. Stampfli and J.P. Williams. Growth conditions and the numerical range in a Banach algebra. The Tohoku Mathematical Journal, 20:417–424, 1968.