ISBN:978-602-9115-22-2

EKSISTENSI SOLUSI OPTIMUM DALAM ANALISA SISTEM PERSEDIAAN TANPA *SHORTAGE**

T. P. Nababan dan M. D. H. Gamal

Jurusan Matematika FMIPA Universitas Riau

A b s t r a k

Makalah ini mengkaji solusi optimum dalam sistim persediaan tanpa *shortage*. Adalah sangat penting adanya keseimbangan antara permintaan dan persediaan sehingga sistem persediaanya dapat diselesaikan secara optimal.

Kata kunci: Infimum, konvergensi dan teori persediaan.

A b s t r a c t

This paper discusses the optimal solution of the system of inventory without shortage. It is necessary to have the equilibrium between demand and available stock so that the system can be solved optimally.

Keywords: Infimum, convergency, inventory theory

1. Pendahuluan.

Dalam managemen persediaan ada dua masalah yang harus dipertimbangkan dalam menyediakan persediaan, yaitu

a. Jika barang terlalu banyak dalam persediaan, maka perusahaan terpaksa menderita biaya tambahan misalnya ongkos pergudangan, biaya perawatan, biaya modal tertanam, biaya kerusakan barang, dal lain-lain.
b. Jika barang terlalu sedikit menimbulkan hilangnya kesempatan untuk mendapat keuntungan, frekwensi pemesanan yang meningkat dan yang paling buruk adalah mengakibatkan hilangnya kepercayaan pelanggan yang pada akhirnya akan merugikan perusahaan itu.

Pada dasarnya analisis persediaan, berkenaan dengan teknik perancangan untuk memperoleh tingkat persediaan dengan menjaga keseimbangan antara biaya karena persediaan yang terlalu sedikit. Oleh karena itu manangemen persediaan

ISBN:978-602-9115-22-2

pada hakikatnya mencakup fungsi yang berhubungan erat yaitu: perencanaan persediaan dan pengawasan persediaan. Aspek perencanaan harus dapat menjawab pertanyaan tentang, berapa yang akan disediakan atau diproduksi dan dimana sumber terbaik dari pengadaan barang-barang. Sedang aspek pengawasan harus mampu menjawab bila dan berapa kali akan dilaksanakan. Jadi titik pusat dari sistim persediaan ialah untuk membentuk model optimum yang ditunjukkan terhadap keputusan yang akan meminimumkan biaya. Untuk itu pada makalah ini akan dikaji suatu persamaan persediaan yang berbentuk :

$$f(x) = \inf_{y \geq x} \left[g(x) + h(y-x) + a \int (y-x) dF(z) \right]$$

2. Metodologi Penelitian.

Penelitian ini dilakukan berdasarkan studi literatur, untuk itu dilakukan langkah-langkah sebagai berikut :

a. Didefinisikan biaya-biaya yang yang ada dalam model persediaan tersebut.
b. Untuk periode awal jumlah stock adalah x tingkat persediaan harus disediakan sebanyak y jumlah pemesanan diawal ini sebesar $(y\text{-}x)$. Karena $g(x)$ merupakan biaya dalam satu periode dengan tingkat persediaan x ,maka jumlah biaya adalah : $g(x) + h(y\text{-}x)$.
c. Dengan menggunakan sifat-sifat matematika analisis akan ditunjukkan persediaan optimum dinyatakan dengan: $f(x) = \inf_{y \geq x} \left[g(x) + h(y-x) + a \int (y-x) dF(z) \right]$ serta eksistensinya .

3. Hasil dan Pembahasan.

3.1. Persamaan Persediaan Optimum.

Dalam teori persediaan, seringkali harus dibuat keputusan untuk interval-interval berulang apakah ada atau tidaknya pesanan barang dilakukan. Ini perlu untuk menambah persediaan sehingga pada interval tersebut pesanan selalu tersedia .

Selanjutnya misalkan :

$g(x)$:= biaya dalam satu periode bila tingkat persediaan adalah x.

$h(x)$:= biaya pemesanan sebanyak x barang.

a := faktor potongan yaitu biaya atau modal yang dikeluarkan selama n periode

setelah periode pemesanan.

D := permintaan

$C_n(x)$:= ekspektasi biaya minimal atas n periode jika tingkat persediaan sesudah

pesanan terpenuhi (*starting stock*) untuk periode pertama adalah x

$f_n(x)$:= ekspektasi biaya minimal atas n periode jika tingkat persdiaan sebelum

pesanan terpenuhi (*initial stock*) untuk periode pertama x.

Karena $g(x)$ adalah biaya dalam satu periode bila tingkat persediaan adalah x maka haruslah $g(x) \geq 0$. Kemudian $h(x)$ adalah fungsi monoton tak turun dengan $h(0) = 0$ dan $0 < a \lesssim 1$. Untuk menurunkan persamaan optimum dilakukan analisis dengan meninjau situasi setiap periode secara berurut. Analisis tahap demi tahap akan menghasilkan suatu persamaan rekursif.

(a). Periode $k = 1$.

Pada periode ini diasumsikan stock awal adalah x. Jika pada periode ini tingkat persediaan harus disediakan sebayak y maka haruslah pemesanan pada awal periode sebesar $(y - x)$, oleh karena itu diperoleh :

i. Biaya peyimpanan sebesar $g(x)$.
ii. Biaya pemesanan sebesar $h(y - x)$.

Maka jumlah biaya pada periode ini hádala : $g(x) + h(y - x)$.

Dengan demikan untuk $k = 1$ diperoleh :

$$\left.\begin{aligned} C_1(x) &= g(x) \\ f_1(x) &= \inf_{y \geq x}[C_1(y) + h(y-x) \end{aligned}\right\} \qquad .....(3.1)$$

(b). Periode $k = 2$.

Jika pada periode $n = 1$ permintaan adalah z dengan distribusi permintaan $F(z)$ maka banyaknya modal yang tertanam dalam persediaan selama periode $k = 1$ adalah

$$\int f_1(x-z)dF(z).$$

Jika a menyatakan faktor bunga bank, maka biaya akibat modal tertanam pada akhir periode $n = 1$ yang harus dibayar pada periode 2 adalah :

$$a\int f_1(x-z)dF(z).$$

ISBN:978-602-9115-22-2

Dengan demikian diperoleh

$$C_2(x) = g(x) + a\int f_1(x-z)dF(z).$$

Jika pada periode ini tingkat persediaan yang harus disediakan adalah y dan karena stok permulaan adalah x maka banyaknya pesanan adalah $(y\text{-}x)$. Oleh karena itu pada periode ini biaya pemesanan adalah $h(y\text{-}x)$.

Sekarang jumlah biaya pada periode $k = 2$ adalah

$$g(x) + a\int f_1(x-z)dF(z) + h(y-x),$$

dari sini diperoleh

$$f_2(x) = \inf_{y\geq x}[C_2(y) + h(y-x)]$$

$$f_2(x) = \inf_{y\geq x}[g(x) + h(y-x) + a\int f_1(x-z)dF(z)$$

Berdasarkan pembahasan di atas, maka pada periode $k = 2$ diperoleh persamaan rekursif (3.2).

$$\left.\begin{aligned} C_2(x) &= g(x) + a\int f_1(x-z)dF(z) \\ f_2(x) &= \inf_{y\geq x}(y) + h(y-x) + a\int f_1(x-z)dF(z) \end{aligned}\right\} \quad \ldots(3.2)$$

Proses di atas dilanjutkan sampai $k = n$, lalu diperoleh persamaan (3.3).

$$\left.\begin{aligned} C_n(x) &= g(x) + a\int f_1(x-z)dF(z) \\ f_n(x) &= \inf_{y\geq x}[C_n(y) + h(y-x)] \\ &= \inf_{y\geq x}[g(x) + h(y-x) + a\int f_{n-1}(x-z)dF(z)] \end{aligned}\right\} \quad \ldots..(3.3)$$

Jelas solusi optimum dari persamaan (3.3) di atas akan tergantung pada fungsi $f_n(x)$. Jika barisan $(f_n(x))$ konvergen ke $f(x)$, akan diperoleh persamaan optimum berbentuk

$$f(x) = \inf_{y \geq x}\left[g(x) + h(y-x) + a\int f_1(x-z)dF(z)\right] \qquad \ldots(3.4)$$

3.2. Eksistensi Solusi Optimum dari Persamaan Persediaan.

Untuk menunjukkan eksistensi dari persamaan (3.4) diperlukan teorema dan sifat-sifat matematika lainnya.

Teorema 3.1. Misalkan $C_n(x)$ dan $f_n(x)$ didefinisikan seperti pasa persamaan (3.3) untuk setiap $x \geq 0$ dan untuk setiap n berlaku :

a. $f_{n+1}(x) \geq f_n x)$

b. $C_{n+1}(x) > C_n(x)$

Bukti: Pembuktian dilakukan secara induksi.

(a). Dari persamaan (3.3) diperoleh

$$f_1(x) = \inf_{y \geq x}[C_1(y) + h(y-x)] \qquad \ldots(3.5)$$

$$f_2(x) = \inf_{y \geq x}[g(x) + h(y-x) + a\int f_1(x-z)dF(z)] \qquad \ldots(3.6)$$

Dari $C_1(y) = g(y)$ maka persamaan (3.5) menjadi:

$$f_1(y) = \inf_{y \geq x}[g(y) + h(y-x)] \qquad \ldots(3.7)$$

Karena $0 < a < 1 \; dan \int f_1(x-z)dF(Z) \geq 0$ maka dari persamaan (3.6) dan (3.7) diperoleh

$$C_2(x) \geq C_1(x)$$

Asumsikan $C_k(x) \geq C_{k+1}(x)$

Selanjutnya

$$C_k(x) = g(x) + a\int f_{k-1}(x-z)dF(z)$$
$$C_{k+1}(x) = g(x) + a\int f_k(x-z)dF(z)$$

Telah diperoleh bahwa :

$$\int f_{k-1}(x-z)dF(z) \leq \int f_k(x-z)dF(z)$$

Dari penjelasan di atas diperoleh bahwa

$f_{k-1}(x) \geq f_k(x) \qquad (k = 1, 2, \ldots\ldots, n)$ untuk setiap $n \in N$.

(b). Dari (3.3) diperoleh

$$C_1(x) = g(x) \qquad \ldots (3.8)$$

$$C_2(x) = g(x) + a\int f_1(x-z)dF(z) \qquad \ldots (3.9)$$

Karena $0 < a < 1$ dan $\int f_1(x-z)dF(Z) \geq 0$ maka (3.8) dan (3.9) diperoleh

$C_k(x) \geq C_1(x)$ dan selanjutnya asumsikan : $C_k(x) \geq C_{k-1}(x)$ menghasilkan

$$\begin{aligned} C_k(x) &= g(x) + a\int f_{k-1}(x-z)dF(z) \\ C_{k+1}(x) &= g(x) + a\int f_k(x-z)dF(z) \end{aligned} \qquad \ldots (3.10)$$

Sebelumnya telah ditunjukkan bahwa $\int f_{k-1}(x-z)dF(z) \leq \int f_k(x-z)dF(z)$, dengan menggŭnakan (3.10) maka diperoleh

$$C_{k+1}(x) \geq C_k(x), \quad (k = 1, 2, \ldots\ldots)$$

dari pembahasan di atas dapat disimpulkan

$C_{n-1}(x) \geq C_n(x)$ untuk setiap $n \in N$.

Jadi Teorema 3.1 ini menunjukkan bahwa barisan $(f_n(x))$ dan $(C_n(x))$ merupakan barisan naik dalam n.

Teorema 3.2. Misalkan bahwa $C_n(x)$ dan $f_n(x)$ didefinisikan pada persamaan (3.3) dan *g(x)* terbatas untuk x yang dibatasi pada interval berhingga maka berlaku $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f_n$ dan $\lim_{n\to\infty} C_n(x) = C(x)$ ada, maka *f(x)* merupakan solusi optimum dari persamaan (3..3).

Bukti: Fungsi *g(x)* terbatas pada suatu interval berhingga. Untuk itu misalkan $g(x) \leq M$ untuk setiap $x \in [o, N]$ ini menghasilkan suatu sifat matematika analisis

$$0 \leq f_n(x) \leq C_n(x) \leq M.\sum_{i=0}^{n-1} a^i \leq M(1-a)^{-1}.$$