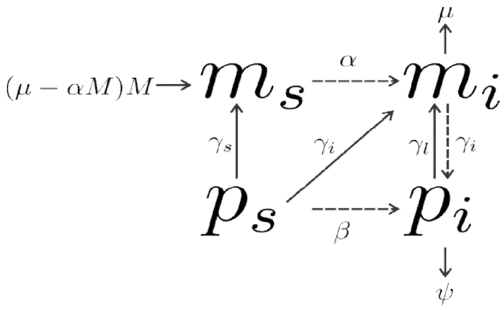
BAB IV HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

IV.1 Pembentukan Model *Predator-Prey* dengan Infeksi Kedua Populasi dan Penyebaran Melalui Pemangsa

Untuk melakukan pemodelan, perlu didefinisikan terlebih dahulu beberapa variabel dan parameter yang terlibat serta asumsi yang akan digunakan. Misalkan didefinisikan jumlah populasi mangsa yang sehat dan sakit pada waktu t dengan $m_s(t), m_i(t)$ dan populasi pemangsa yang sehat dan sakit dengan $p_s(t), p_i(t)$. Proses interaksi antara populasi mangsa dan pemangsa ditunjukkan pada Gambar (1)



Gambar 1. Skema interaksi dan proses terjadinya perpindahan infeksi melalui interaksi sesama mangsa dan antar mangsa-pemangsa.

Model *Predator-Prey* dengan adanya infeksi pada kedua populasi dan terjadi penyebaran infeksi melalui proses memangsa, berdasarkan skema pada Gambar (1) dapat dituliskan

$$\frac{dm_s}{dt} = (\mu - aM)M - \alpha m_s m_i - \gamma_s p_s$$
$$\frac{dm_i}{dt} = \alpha m_s m_i - \gamma_i p_s m_i - \gamma_l p_i m_i - \mu m_i$$
$$\frac{dp_s}{dt} = \gamma_s p_s m_s - \gamma_i p_s m_i - \beta p_s p_i$$
$$\frac{dp_i}{dt} = \beta p_s p_i + \gamma_i p_s m_i + \gamma_l p_i m_i - \psi p_i$$

dengan $a, \mu, \alpha, \beta, \psi, \gamma_s, \gamma_i, \gamma_l \in \mathbb{R}^+$. Asumsi yang digunakan adalah

1. Laju kelahiran mangsa bersifat logistik, dan keturunan bersifat sehat.
2. Laju kelahiran pemangsa diabaikan.
3. Kematian hanya terjadi di bagian populasi yang sakit.
4. Populasi pemangsa yang sehat akan terjangkit penyakit ketika memangsa mangsa yang terinfeksi.

5. Laju pertumbuhan dan kematian di masing-masing populasi dianggap sama.

IV.2 Titik Ekuilibrium

Titik ekuilibrium diperoleh dengan menyelesaikan sistem $m_s'=0, m_i'=0, p_s'=0, p_i'=0$ sehingga diperoleh tiga (3) himpunan titik ekuilibrium yaitu

$$y_e^1=\{m_s=0, m_i=0, p_s=0, p_i=0\},$$
$$y_e^2=\left\{m_s=\frac{\mu}{a}, m_i=0, ps=0, p_i=0\right\},$$
$$y_e^3=\left\{m_s=\frac{\beta\mu-\gamma_s\psi}{a\beta}, m_i=0, ps=\frac{\psi}{\beta}, p_i=\frac{\gamma_s(\beta\mu-\gamma_s\psi)}{a\beta^2}\right\}$$

IV.3 Analisa Kestabilan Lokal

Pada sistem terdapat delapan (8) parameter yang tidak diketahui nilainya. Idealnya, nilai ini dapat diperoleh dengan mengambil data lapangan. Namun, untuk keperluan ini, seringkali data dipilih secara acak dengan tetap mempertimbangkan sifat parameter yang diambil. Untuk keperluan ini, dipilih nilai parameter

$$a=0.8, \mu=0.05, \alpha=0.3, \beta=0.1, \psi=0.03,$$
$$\gamma_s=0.1, \gamma_i=0.2, \gamma_l=0.1.$$

Nilai awal bagi populasi dipilih $m_s(0)=200, p_s(0)=20, m_i(0)=10, p_i(0)=1$. Dengan parameter yang dipilih, diperoleh titik ekuilibrium

$$y_e^1=\{m_s=0, m_i=0, p_s=0, p_i=0\},$$
$$y_e^2=\{m_s=0.062, m_i=0, ps=0, p_i=0\},$$
$$y_e^3=\{m_s=0.025, m_i=0, ps=0.3, p_i=0.025\}$$

Matriks linearisasi pada titik ekuilibrium pertama adalah

$$A_1=\begin{pmatrix} 0.05 & 0.05 & 0 & 0 \\ 0 & 0.05 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.03 \end{pmatrix}$$

Nilai eigen dari matriks ini adalah

$$\lambda=\begin{pmatrix} 0.05 \\ -0.05 \\ 0 \\ -0.03 \end{pmatrix}$$

Berdasarkan nilai eigen yang diperoleh, maka sistem pertama ini bersifat tidak stabil di sekitar titik ekuilibriumnya. Untuk mendapatkan solusi khusus, langkah pertama adalah menentukan matriks fundamentalnya. Matriks fundamentalnya adalah

$$M = \begin{pmatrix} 0.08 - 0.6e^{-0.03t} + 0.96e^{0.05t} & 0.48e^{0.05t} - e^{-0.03t} - 0.5e^{-0.05t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-0.05t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - 0.05e^{-0.03t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-0.03t} \end{pmatrix}$$

Sehingga diperoleh

$$M(0) = \begin{pmatrix} 0.44 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.95 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Berdasarkan nilai awal yang diberikan, maka diperoleh solusi khusus dari sistem pertama ini yaitu

$$\begin{aligned} m_s(t) &= 38.0 - 300.0\mathrm{e}^{-0.030t} + 470.0\mathrm{e}^{0.050t} - 5.0\mathrm{e}^{-0.050t} \\ m_i(t) &= 10.0\mathrm{e}^{-0.050t} \\ p_s(t) &= 55.0 - 2.8\mathrm{e}^{-0.030t} \\ p_i(t) &= 5.0\mathrm{e}^{-0.030t} \end{aligned}$$

Dari solusi khusus yang diperoleh, perhatikan bahwa

$$\lim_{t\to\infty} m_s(t) = \infty .$$

Hasil ini menyatakan bahwa sistem ini tidak stabil di sekitar titik ekuilibrium pertama.

Matriks linearisasi pada titik ekuilibrium kedua adalah

$$A_2 = \begin{pmatrix} -0.049 & -0.07 & -0.0062 & 0 \\ 0 & -0.031 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0062 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.03 \end{pmatrix}$$

Nilai eigen dari matriks ini adalah

$$\lambda = \begin{pmatrix} -0.049 \\ -0.031 \\ 0.0062 \\ -0.03 \end{pmatrix}$$

Berdasarkan nilai eigen yang diperoleh, maka sistem pertama ini bersifat tidak stabil di sekitar titik ekuilibriumnya. Untuk mendapatkan solusi khusus, langkah pertama adalah menentukan matriks fundamentalnya. Matriks fundamentalnya adalah

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 & M_3 & M_4 \end{pmatrix}$$

$$M_1 = \begin{pmatrix} e^{-0.049t} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} -3.9e^{-0.031t} + 3.9e^{-0.049t} \\ e^{-0.031t} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} 0.58e^{-0.031t} + 0.093e^{-0.049t} - 0.68e^{-0.030t} - 0.11e^{0.0062t} \\ 0 \\ -5.2e^{-0.031t} + 0.18e^{-0.049t} + 6e^{-0.030t} + 0.99e^{0.0062t} \\ 0 \end{pmatrix}, M_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.038e^{-0.031t} + e^{-0.030t} \end{pmatrix}$$

Sehingga diperoleh

$$M(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -0.12 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.96 \end{pmatrix}$$

Berdasarkan nilai awal yang diberikan, maka diperoleh solusi khusus dari sistem kedua ini yaitu

$$m_s(t) = 250.0\mathrm{e}^{-0.049t} - 25.0\mathrm{e}^{-0.031t} - 17.0\mathrm{e}^{-0.030t} - 2.8\mathrm{e}^{0.0062t} + 0.062$$

$$m_i(t) = 10.0\mathrm{e}^{-0.031t}$$

$$p_s(t) = 4.5\mathrm{e}^{-0.049t} - 130.0\mathrm{e}^{-0.031t} + 150.0\mathrm{e}^{-0.030t} + 25.0\mathrm{e}^{0.0062t}$$

$$p_i(t) = -0.19\mathrm{e}^{-0.031t} + 5.0\mathrm{e}^{-0.030t}$$

Berdasarkan solusi khusus yang telah diperoleh, perhatikan bahwa

$$\lim_{t\to\infty} m_s(t) = \infty$$

Yang berarti bahwa sistem kedua juga tidak stabil di sekitar titik ekuilibrium kedua. Selanjutnya, matriks linearisasi untuk titik ekuilibrium ketiga adalah

$$A_3 = \begin{pmatrix} -0.02 & -0.002 & -0.0025 & 0 \\ 0 & -0.1 & 0 & 0 \\ 0.03 & -0.06 & 0 & -0.03 \\ 0 & 0.062 & 0.0025 & 0 \end{pmatrix}$$

Nilai eigen dari matriks ini adalah

$$\lambda = \begin{pmatrix} -0.01643 \\ -0.001786 + 0.00938I \\ -0.001786 - 0.00938I \\ -0.1 \end{pmatrix}$$

Oleh karena seluruh $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$ maka sistem ini stabil asimtotik. Artinya, sistem bergerak dari nilai awal menuju ke titik ekuilibrium. Selanjutnya, matriks fundamentalnya adalah

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 & M_3 & M_4 \end{pmatrix}$$

Dengan

$$M_1 = e^{-0.016t}\begin{pmatrix} -0.56 \\ 0 \\ 0.813 \\ -0.12 \end{pmatrix}, M_2 = e^{-0.017t}\begin{pmatrix} -0.047\cos(0.0093t) - 0.15\sin(0.0093t) \\ 0 \\ 0.96\cos(0.0093t) + 0.96\sin(0.0093t) \\ 0.2\cos(0.0093t) - 0.30\sin(0.0093t) \end{pmatrix}$$

Dan

$$M_3 = e^{-0.017t}\begin{pmatrix} 0.047\cos(0.0093t) - 0.15\sin(0.0093t) \\ 0 \\ 0.96\cos(0.0093t) - 0.96\sin(0.0093t) \\ -0.2\cos(0.0093t) - 0.30\sin(0.0093t) \end{pmatrix}, M_4 = e^{-0.1t}\begin{pmatrix} -0.03 \\ -0.8 \\ -0.32 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

Serta akan diperoleh

$$M(0) = \begin{pmatrix} -0.56 & -0.047 & -0.15 & -0.03 \\ 0 & 0 & 0 & -0.8 \\ 0.81 & 0.96 & 0.96 & -0.32 \\ -0.12 & 0.2 & -0.3 & 0.5 \end{pmatrix}$$

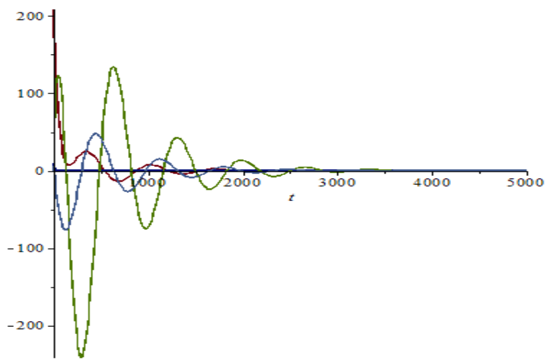
Berdasarkan nilai awal yang telah diberikan, solusi khusus untuk sistem linearisasi pada titik ekuilibrium ketiga adalah

$$m_s(t) = 250.0e^{-0.016t} - 42.0e^{-0.0017t}\cos(0.0093t) - 13.0e^{-0.0017t}\sin(0.0093t) + 0.375e^{-0.1t} + 0.025$$
$$m_i(t) = 10.0e^{-0.1t}$$
$$p_s(t) = -360.0e^{-0.016t} + 390.0e^{-0.0017t}\cos(0.0093t) - 85.0e^{-0.0017t}\sin(0.0093t) + 4.0e^{-0.1t} + 0.30$$
$$p_i(t) = 52.0e^{-0.016t} - 39.0e^{-0.0017t}\cos(0.0093t) - 96.0e^{-0.0017t}\sin(0.0093t) - 6.25e^{-0.1t} + 0.025$$

Jika diperiksa nilai limitnya untuk $t \to \infty$ akan diperoleh

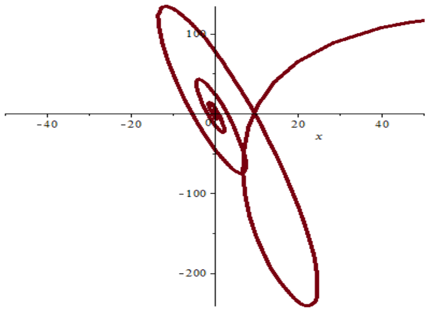
$$\lim_{t\to\infty} m_s(t) = 0.025$$
$$\lim_{t\to\infty} m_i(t) = 0$$
$$\lim_{t\to\infty} p_s(t) = 0.3$$
$$\lim_{t\to\infty} p_i(t) = 0.025$$

Secara grafikal, solusi dari sistem ini dapat ditunjukkan pada Gambar (2) berikut ini



Gambar 2. Solusi sistem linearisasi pada titik ekuilibrium ketiga untuk $t = [0, 5000]$

Jika dibuat kurva parametrik dengan perbandingan mangsa sehat dan pemangsa sehat, secara gafikal dapat ditunjukkan pada Gambar (2) berikut ini



Gambar 3. Kurva parametrik perbandingan $m_s(t), p_s(t)$

Pada gambar (2) terlihat bahwa dari nilai awal, sistem berosilasi hingga akhirnya menuju ke titik ekuilibrium masing-masing. Gambar (3) menunjukkan perbandingan antara mangsa dan pemangsa yang sehat. Dari nilai awal, kedua populasi ini akan terus bergerak hingga akhirnya menuju titik $(0.025, 0.3)$