BAB II TINJAUAN PUSTAKA

II.1 Model *Predator-Prey*

Model *Predator-Prey* diperkenalkan oleh Alfred James Lotka dan Vito Volterra [7, h. 545] untuk menggambarkan hubungan interaksi antara dua populasi yang salah satunya bertindak sebagai pemangsa dan yang lainnya sebagai mangsa. Misalkan didefinisikan $x(t), y(t)$ berturut-turut adalah jumlah mangsa dan pemangsa pada suatu daerah pada waktu t. Perubahan jumlah populasi pada masing-masing kelompok adalah dituliskan dalam persamaan

$$\frac{dx}{dt} = ax - \alpha xy$$
$$\frac{dy}{dt} = by + \beta xy$$

Dengan $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$. Model ini menyatakan bahwasanya

1. Jumlah mangsa akan tumbuh secara proporsional sebesar a dan akan berkurang akibat dimakan oleh pemangsa yang bergantung terhadap frekuensi interaksi sebesar α
2. Jumlah pemangsa akan tumbuh secara proporsional sebesar b dan juga tumbuh dikarenakan kecukupan pangan yang sesuai dengan frekuensi interaksi dengan mangsa sebesar β

II.2 Titik Ekuilibrium

Model matematis yang digunakan untuk menggambarkan fenomena di alam seringkali dinyatakan dalam sistem persamaan diferensial nonlinear. Sayangnya, sistem persamaan diferensial nonlinear sangat sulit untuk dianalisa secara analitik. Oleh karena itu, analisa lokal digunakan untuk menganalisa kestabilan di sekitar titik ekuilibrium.

Definisi. [7, h. 509] Misalkan diberikan sistem persamaan diferensial $y' = f(y)$ dengan $y \in \mathcal{C}^n$ dan $f : \mathcal{C}^n \to \mathcal{C}^n$. Titik ekuilibrium y_e didefinisikan sebagai titik yang yang mengakibatkan $f(y_e) = 0$.

Definisi. Misalkan diberikan sistem persamaan diferensial $y' = f(y)$ dengan $y \in \mathcal{C}^n$ dan $f : \mathcal{C}^n \to \mathcal{C}^n$ dan titik ekuilibrium $y_e = 0$. Bentuk linearisasi dari sistem $y' = f(y)$ dapat dinyatakan dalam bentuk $y' = Ay$ dengan A adalah matriks linearisasi yaitu

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial y_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial y_1} & \frac{\partial f_n}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial y_n} \end{pmatrix}$$

Yang dievaluasi pada titik ekuilibrium y_e

II.3 Kestabilan Routh-Hurwitz

Sistem yang telah dilinearisasi selanjutnya dianalisa sifat kestabilannya di sekitar titik ekuilibrium. Analisa kestabilan digunakan untuk melihat perilaku sistem, menjauhi atau menuju ke titik ekuilibrium. Untuk melakukan hal ini, digunakan kriteri Routh-Hurwitz.

Definisi. [8, h.222] Misalkan diberikan sistem persamaan diferensial biasa $y' = Ay$ dengan $y \in \mathcal{C}^n$ dan A adalah matriks linearisasi. Misalkan diberikan persamaan karateristik dari matriks A dalam bentuk

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \quad \text{s}$$

Dengan $a_i \in \mathbb{R}^+, \forall i = 1,2,\ldots,n$ dan $a_n \neq 0$. Sistem $y' = Ay$ akan stabil jika memenuhi

$$\Delta_1 = a_1 > 0$$

$$\Delta_2 = \det\begin{pmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{pmatrix} > 0$$

$$\vdots$$

$$\Delta_n = \det\begin{pmatrix} a_1 & a_0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_{n-2} \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & \cdots & a_n \end{pmatrix} > 0$$

Jika salah satu koefisien $a_i, i = 1,\ldots,n$ bernilai negatif atau nol maka sistem tidak stabil.

II.4 Solusi Sistem Persamaan Diferensial Linear

Untuk mendapatkan analisa solusi secara eksak untuk tiap waktu pengamatan, maka sistem persamaan diferensial perlu untuk diselesaikan. Misalkan diberikan sistem persamaan diferensial $y' = Ay$ dengan $y \in \mathcal{C}^n$. Misalkan nilai eigen dari matriks A adalah $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ dengan vektor eigen dari masing-masing nilai eigen $v_1, v_2, \dots, v_n$. Solusi sistem persamaan diferensial untuk setiap nilai eigen dapat dinyatakan dalam bentuk

$$y_i = v_i e^{\lambda_i t}, \forall i = 1, 2, \dots, n$$

Solusi umum dari sistem persamaan diferensial selanjutnya dituliskan sebagai kombinasi linear dari masing-masing solusi nilai eigen sehingga akan diperoleh

$$y(t) = c_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 v_2 e^{\lambda_1 t} + \cdots + c_n v_n e^{\lambda_n t}$$

Dengan $c_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n$ adalah suatu konstanta yang diperoleh dari nilai awal sistem yang diberikan.

Untuk mendapatkan solusi khusus, perlu ditentukan nilai dari $c_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n$. Misalkan didefinisikan matriks fundamental dalam bentuk

$$M(t) = \begin{bmatrix} v_1 e^{\lambda_1 t} & v_2 e^{\lambda_2 t} & \cdots & v_n e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

Solusi umum selanjutnya dapat dituliskan dalam bentuk

$$y(t) = M(t)c$$

Dengan $c = \langle c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad c_n \rangle$. Untuk $t = 0$ akan diperoleh $y(0) = M(0)c$. Oleh karena $M(0) = [v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_n]$ maka akan diperoleh $c = M^{-1}(0) y(0)$. Solusi khusus dari sistem dapat dinyatakan sebagai

$$y(t) = M(t) M^{-1}(0) y(0)$$