BAB II

SOLUSI PERIODIK DAN BIFURKASI

2.1 SOLUSI PERIODIK SISTEM MANDIRI/ AUTONOMOUS

Misal suatu sistem linier mandiri :

$x' = \mathbb{A}x$, dengan $x \in R^2$ .....(2.1.1)

maka kestabilan titik $x = 0$ ditentukan oleh nilai eigen dari matriks $\mathbb{A}$

Misalkan λ_1 dan λ_2 nilai eigen dari matrik $\mathbb{A}$ di (2.1)

(i). Jika λ_1 dan λ_2 dan keduanya riil dan bertanda sama, maka $x = 0$ stabil untuk λ_1 , $\lambda_2 < 0$, dan tak stabil untuk λ_1 , $\lambda_2 > 0$. Orbit disekitar $x = 0$ merupakan simpul.

(ii). Jika λ_1 dan λ_2 keduanya riil berbeda tanda, maka $x = 0$ berupa titik pelana.

(iii) Jika λ_1 dan λ_2 kompleks sekawan, dengan $\lambda_{1,2} = \alpha \pm {}_1\beta$, dimana $\alpha \neq 0 \neq \beta$, maka $x = 0$ stabil untuk $\alpha < 0$ dan tak stabil untuk $\alpha > 0$ dan orbit disekitar $x = 0$ berupa spiral.

(iv) Jika λ_1 dan λ_2 imajiner murni (yaitu $\lambda = \pm {}_1\beta$, $\beta \neq 0$), maka $x = 0$ stabil seragam tapi tak asimtotik dan orbit di sekitar $x = 0$ berupa senter.

Sistem mandiri di R^2 seperti (2.1.1) dapat ditulis dalam bentuk :

$$\begin{aligned} x' &= f(x, y), \\ y' &= g(x, y), \end{aligned} \quad \text{.....(2.1.2)}$$

dimana x, y, f, dan g skalar-skalar.

Repository University Of Riau
PERPUSTAKAAN UNIVERSITAS RIAU
http://repository.unri.ac.id/

Akan dicari kriteria tentang adanya *selesaian periodik* dari (2.1.2), yaitu suatu selesaian sedemikian sehingga :

$$x(t+T) = x(t), \text{ dan } y(t+T) = y(t), \quad \forall t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.1.3)$$

Disini T disebut *Periode* dari selesaian . Orbit dari selesaian periodik berupa kurva tertutup pada bidang fase.

Perhatikan contoh-contoh berikut :

1. Misal sistem :

$$\begin{aligned} x' &= y(1+r^2) \\ y' &= -x(1+r^2) \end{aligned} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.1.4)$$

dimana $r^2 = x^2 + y^2$. Jika dilakukan transformasi ke koordinat polar (r, θ), dengan

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \end{aligned} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.1.5)$$

maka (2.1.4) menjadi :

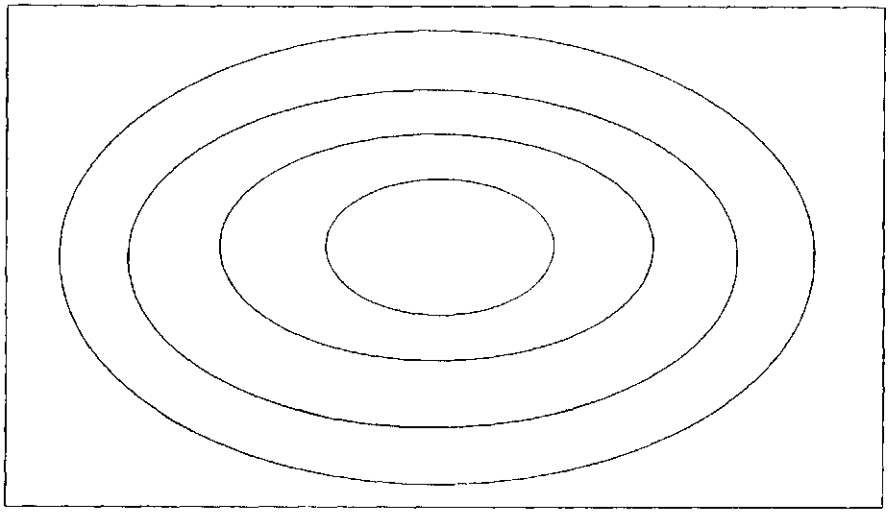
$$\begin{aligned} r' &= 0 \\ \theta' &= -1 - r^2 \end{aligned} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.1.6)$$

dan akan diperoleh selesaian :

$$\begin{aligned} r &= r_0 \\ \theta &= \theta_0 - (r_0^2 + 1)t \end{aligned} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.1.7)$$

Persamaan (2.1.7) berupa keluarga selesaian periodik yang masing-masing berupa lingkaran pada lingkaran pada bidang fase dengan jari-jari r_0.

Repository University Of Riau
PERPUSTAKAAN UNIVERSITAS RIAU
http://repository.unri.ac.id/



Gambar 1. Selesaian sistem (2.1.4)

2. Misalkan suatu persamaan diferensial :

$$u' + (u^2 + u'^2 - 1) u' + u = 0 \quad \ldots\ldots (2.1.8)$$

Jika diambil substitusi :

$$\begin{aligned} x &= u \\ y &= u' \end{aligned} \quad \ldots\ldots (2.1.9)$$

maka (2.1.8) menjadi :

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= - x - (r^2 - 1) y \end{aligned} \quad \ldots\ldots (2.20)$$

dimana $r^2 = x^2 + y^2$. Dengan substitusi koordinat polar seperti (2.1.5), diperoleh :

$$\begin{aligned} r' &= - r (r^2 - 1) \sin^2 \vartheta \\ \theta &= - 1 - (r^2 - 1) \sin \theta . \cos \theta \end{aligned} \quad \ldots\ldots (2.21)$$

Satu-satunya titik tetap adalah titik pangkal (0,0) yang tak stabil. Perhatikan bahwa $r = 1$ dan $\theta = \theta_0 - t$ adalah suatu selesaian periodik dengan periode 2π dan

Repository University Of Riau
PERPUSTAKAAN UNIVERSITAS RIAU
http://repository.unri.ac.id/

berupa lingkaran dengan jari-jari 1 dalam bidang fase. Ini merupakan satu-satunya selesaian periodik. karena $r' \leq 0$ untuk $r > 1$ dan $r' \geq 0$ untuk $r < 1$. Khususnya $r' < 0$ untuk $r > 1$ dan $\theta \neq 0$ atau π, $r' > 0$ untuk $r < 1$ dan $\theta \neq 0$ atau π, dan $r' = 0$ untuk $\theta = 0$ atau π

Akibatnya selesaian periodik stabil asimtotik.

Dua contoh diatas menunjukan bahwa suatu selesaian periodik pada umumnya berupa keluarga selesaian-selesaian periodik seperti (2.1.4) atau hanya satu selesaian periodik terisolasi seperti (2.20). Contoh yang kedua ini membawa kita kepada definisi berikut :

Definisi 2.1 :

Limit Cycle adalah suatu orbit dari selesaian periodik terisolasi.

Yang dimaksud dengan *selesaian periodik terisolasi* adalah bahwa tidak ada selesaian periodik lain dalam suatu sekitar yang kecil dari selesaian periodik itu.

Repository University Of Riau
PERPUSTAKAAN UNIVERSITAS RIAU
http://repository.unri.ac.id/

Selanjutnya akan dikaji beberapa hal yang dapat membantu kita untuk memutuskan tentang ada tidaknya selesaian periodik itu, dan menentukan kestabilannya.

Teorema 1 :

Sistem persamaan (2.1.2) tak mempunyai selesaian periodik dalam suatu daerah dimana ($f_x + g_y$) tak berganti tanda.

Bukti :

Misal C suatu orbit dari selesaian periodik yang melingkungi daerah S. Dengan Teorema Green pada bidang maka,

$\iint_S (f_x + g_y)\,dxdy = \oint_C (f\,dy - g\,dx)$. Tetapi pada orbit C (2.1.2) dipenuhi sehingga

$\oint_C (f\,dy - g\,dx) = \oint_C (x'\,dy - y'\,dx) = 0$ sehingga $f_x + g_y$ harus berganti tanda dalam S.

Teorema 2 :

Orbit dari selesaian periodik terisolasi (limit cycle) harus melingkungi paling sedikit satu titik tetap.

Bukti :

Misalkan S adalah daerah didalam orbit periodik C. Andaikan C tak melingkungi titik tetap, maka $f^2 + g^2 \neq 0$ dalam S. Misalkan ϕ suatu sudut antara vektor singgung pada C dengan sumbu x.

Maka $\oint_C d\phi = 2\pi$ dan $\tan\phi = \frac{y'}{x'} = \frac{g}{f}$.

Repository University Of Riau
PERPUSTAKAAN UNIVERSITAS RIAU
http://repository.unri.ac.id/

sehingga $d\phi = \dfrac{f\,dg - g\,df}{f^2 + g^2}$ .Dengan teorema Green pada bidang maka,

$$\oint_c d\phi = \oint_c \frac{f\,dg - g\,df}{f^2 + g^2} = \iint_A \left\{ \frac{\partial}{\partial f}\left[\frac{f}{f^2 + g^2} \right] + \frac{\partial}{dg}\left[\frac{g}{f^2 + g^2} \right] \right\} df\,dg$$

Tetapi integran dalam integral paling kanan bernilai nol. Terjadi kontradiksi dan pengandaian diingkar. Terbukti bahwa orbit periodik melingkungi paling sedikit satu titik tetap.

Teorama (Poincare-Bendixson) 3 :

Misal R daerah tertutup dan terbatas yang tak memuat titik tetap dari (2.1.2) dan f , $g \in C^1$ pada R sedemikian hingga ada orbit p yang terletak didalam R, $\forall\, t \geq 0$, maka p berupa orbit tertutup atau mendekati orbit tertutup untuk $t \to \infty$.

Bukti :

Misal orbit p adalah $\{ (x(t), y(t) \}$ dengan $t \geq 0$. Jika p suatu orbit tertutup, maka bukti selesai. Andaikan p bukan orbit tertutup. Misalkan $x_n = x(n)$ dan $y_n = y(n)$, maka (x_n , y_n) adalah barisan titik-titik pada p yang ada didalam R. Karena R tertutup dan terbatas, maka barisan itu memuat titik limit katakan $(x_0 , y_0) \in R$. Jadi $\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, N \in \mathbb{N} \ni |x_n - x_0| < \varepsilon$ dan $|y_n - y_0| < \varepsilon$, $\forall\, n \geq N$

Misalkan p_0 suatu orbit yang melalui (x_0 , y_0) pada $t = 0$. Karena itu p_0 berada didalam R untuk $t \geq 0$. Selanjutnya buat segmen garis l_s yang melalui (x_0 , y_0) dan tegak lurus p_0. Jika l cukup pendek , maka semua orbit yang memotong l mempunyai arah yang sama.

Repository University Of Riau
PERPUSTAKAAN UNIVERSITAS RIAU
http://repository.unri.ac.id/

Karena (x_0, y_0) titik limit barisan (x_n, y_n), maka p harus memotong l sebanyak tak hingga kali jika $t \to \infty$. Orbit p_0 pun harus memotong l sebanyak tak hingga kali jika $t \to \infty$, sebab jika p_0 tidak memotong l setelah $t = t_1$, maka setiap orbit yang cukup dekat dengan (x_0, y_0) tidak memotong l untuk t yang cukup besar, sehingga p tidak memotong l setelah t yang cukup besar. Ini tidak mungkin.

Misal (x^*, y^*) titik pertama dimana p_0 memotong l sesudah (x_0, y_0). Maka $(x^*, y^*) = (x_0, y_0)$, sebab jika tidak demikian, ambil l^* bagian dari l diantara (x_0, y_0) dan (x^*, y^*). Maka p_0 melewati l^* pada (x^*, y^*) dan tak pernah memotong l^* lagi jika t naik, termasuk p. Dengan demikian (x_0, y_0) bukan titik limit p. Kontradiksi. Jadi $(x^*, y^*) = (x^*, y^*)$.

Dengan demikian p_0 suatu orbit p_0 untuk $t \to \infty$.

2.2 BIFURKASI DAN ORBIT SOLUSI PERIODIK

Dalam bentuk yang paling umum, teori bifurkasi adalah suatu teori tentang selesaian- selesaian asimtotik dari persamaan nonlinier. Selesaian asimtotik dimaksudkan, sebagai contoh selesaian keseimbangan, selesaian periodik, dan selesaian hampir periodik.

Disini hanya akan dibicarakan bifurkasi disekitar titik tetap atau orbit periodik saja, sehingga disebut bifurkasi lokal.

Kita perhatikan sistem persamaan differensial :

$$x' = f_\mu(x) \quad \text{dengan} \quad x \in R, \ \mu \in R^k \qquad \ldots\ldots(2.2.1)$$

Disini x merupakan variabel bebas dan μ parameter.

Repository University Of Riau
PERPUSTAKAAN UNIVERSITAS RIAU
http://repository.unri.ac.id/

Definisi 2.2 :

$\bar{x}$ dikatakan *titik tetap* dari (2.2), jika $f_\mu (\bar{x}) = 0$.

Misalkan $\bar{x}$ suatu titik tetap dari $f_\mu (x)$ .Karena μ bervariasi, maka teorema fungsi implisit mengakibatkan bahwa titik tetap-titik tetap itu merupakan fungsi-fungsi licin dari μ yang melewati titik-titik itu. Jika matriks Jacobian dari $f_\mu (\bar{x})$, yaitu $D_x f_\mu (\bar{x})$ mempunyai nilai eigen nol, grafik setiap fungsi ini merupakan cabang dari titik tetap (2.2.1).

Pada suatu titik tetap (x_0 , μ_0) dimana $D_x f_\mu$ mempunyai nilai eigen nol, beberapa cabang titik tetap bisa berpotongan bersama-sama dan dikatakan bahwa (x_0 , μ_0) suatu titik bifurkasi.

Kita perhatikan beberapa contoh :

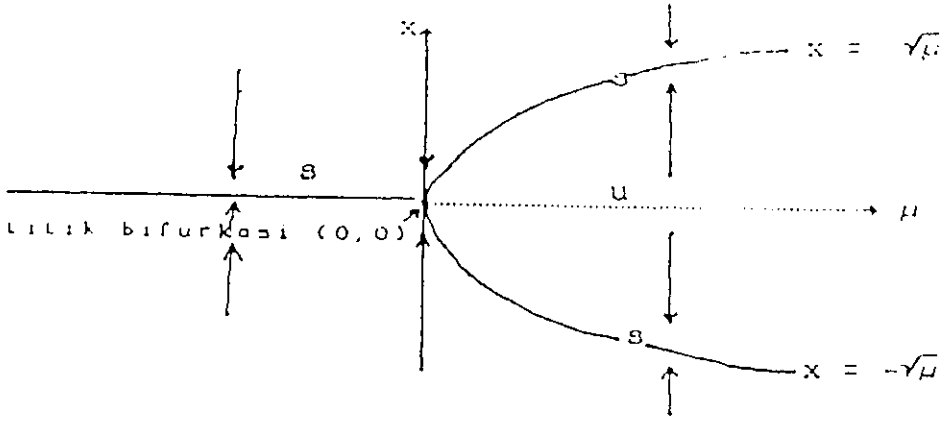
a. Misal $f_\mu (x) = \mu x - x^3$.

Jika $\mu \leq 0$, satu-satunya titik tetap adalah $x = 0$. Jika $\mu > 0$ maka titik tetapnya adalah $x = 0$ dan $x = \pm \sqrt{\mu}$. Jadi untuk $\mu > 0$ akan muncul sepasang titik tetap baru $x = \pm \sqrt{\mu}$. Kita hitung $D_x f_\mu (x) = \mu - 3x^2$.

Pada titik tetap $x = 0$, $D_x f_\mu (0) = \mu$ sehingga $D_x f_\mu < 0$ jika $\mu < 0$ dan $D_x f_\mu > 0$ jika $\mu > 0$. Jadi titik tetap $x = 0$ stabil untuk $\mu < 0$. Dan tak stabil untuk $\mu > 0$. Untuk $\mu > 0$, muncul titik tetap baru $x = \pm \sqrt{\mu}$ dimana $Df_\mu (\pm \sqrt{\mu}) = -2\mu$. Sehingga titik tetap $x = \pm \sqrt{\mu}$ stabil untuk $x > 0$ .dan $f_\mu (x) > 0$ .Untuk $x < 0$. Jadi untuk $\mu = 0$ titik $x = 0$ stabil.

Repository University Of Riau
PERPUSTAKAAN UNIVERSITAS RIAU
http://repository.unri.ac.id/

Disini titik (0,0)merupakan titik bifurkasi. Gambar diagram bifurkasinya adalah :



Gambar 2.a. Diagram bifurkasi $f_\mu(x) = \mu x - x^3$

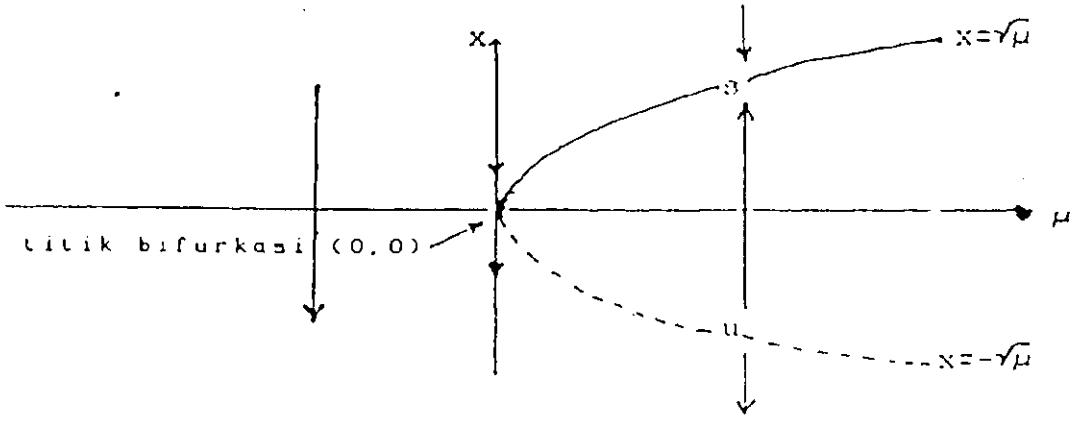
b. Misal $f_\mu(x) = \mu - x^2$,

maka titik tetapnya adalah $x = \pm\sqrt{\mu}$ yang tedefinisikan hanya untuk $\mu > 0$.

Disini $D_x f_\mu(x) = -2x$. Sehingga diperoleh $D_x f_\mu(x) < 0$ untuk $x > 0$ dan $D_x f_\mu(x) > 0$ untuk $x < 0$. Jadi titik tetap $x = \sqrt{\mu}$ stabil dan titik tetap $x = -\sqrt{\mu}$ tak stabil. Untuk $\mu > 0$, semua selesaian yang berawal diatas titik tetap stabil dan diantara titik tetap stabil dan titik tetap tak stabil akan menuju ke titik tetap stabil itu, sedang selesaian yang berawal dibawah titik tetap tak stabil akan menuju $-\infty$. Untuk $\mu < 0$, maka $D_x f_\mu(x) < 0$, semua selesaian menuju $-\infty$. Untuk $\mu = 0$, maka $f_\mu(x) = -x^3$ sehingga $f_\mu(x) > 0$, untuk $x < 0$ dan $f_\mu(x) < 0$ untuk $x > 0$ Jadi untuk $\mu = 0$ titik $x = 0$ stabil.

Repository University Of Riau
PERPUSTAKAAN UNIVERSITAS RIAU
http://repository.unri.ac.id/

Disini titik pangkal (0,0) merupakan satu-satunya titik bifurkasi. Gambar diagram bifurkasi dari persamaan diatas adalah sebagai berikut :



Gambar 2.b. Diagram bifurkasi $f_\mu(x) = \mu - x^2$

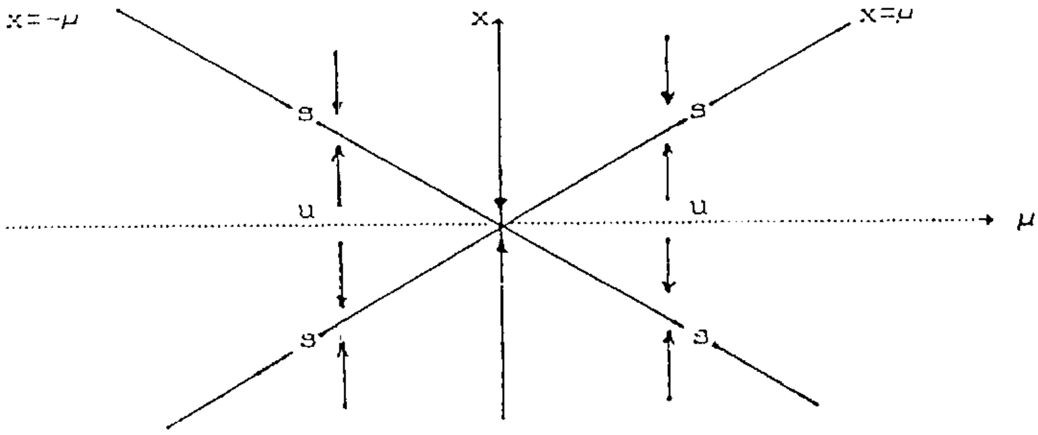
c. Misal $f_\mu(x) = \mu^2 x - x^3$

maka titik tetapnya adalah $x = 0$ dan $x = \pm\mu$ dan $D_x f_\mu(x) = \mu^2 - 3x^2$.

$D_x f_\mu(0) = \mu^2 > 0$ untuk $\mu \neq 0$ jadi titik tetap $x = 0$ tak stabil untuk $\mu \neq 0$.

$D_x f_\mu(\pm\sqrt{\mu}) = -2\mu^2 < 0$ untuk $\mu \neq 0$, sehingga titik tetap $x = \pm\mu$ stabil untuk $\mu \neq 0$. Untuk $\mu = 0$, maka $f_\mu(x) = -x^3$ sehingga $f_\mu(x) > 0$ untuk $x < 0$ dan $f_\mu(x) < 0$ untuk $x > 0$. Jadi titik pangkal (0,0) stabil. Gambar diagram bifurkasi adalah :

Repository University Of Riau
PERPUSTAKAAN UNIVERSITAS RIAU
http://repository.unri.ac.id/



Gambar 2.c. Diagram bifurkasi $f_\mu(x) = \mu^2 x - x^3$

2.3 BIFURKASI HOPF

Dalam uraian sebelumnya telah disinggung sedikit tentang selesaian periodik terisolasi atau limit cycle.

Perhatikan sistem :

$$x' = f_\mu(x) \quad \text{.......................} \quad (2.3.1)$$

Dengan $x \in R^n$ dan f_μ fungsi licin yang mempunyai titik tetap $p(\mu_0)$,

dimana Df_{μ_0} mempunyai pasangan nilai eigen sederhana imajiner murni $\pm i\omega$, $\omega > 0$, dan tak ada nilai eigen yang bagian riilnya nol. Teorema fungsi implisit menjamin bahwa untuk setiap μ dekat μ_0 ada titik tetap $p(\mu)$ didekat $p(\mu_0)$ yang licin terhadap μ. Dimensi manifold stabil dan manifold tak stabil $p(\mu)$ berubah jika nilai eigen $df(p(\mu))$ melewati sumbu imajiner pada μ_0.

Perubahan kualitatif dalam orbit lokal di dekat $p(\mu)$ ditandai oleh perubahan lokal bidang fase yang tak melibatkan titik tetap. Suatu petunjuk tentang apa yang terjadi dalam masalah bifurkasi pada titik tetap dengan nilai eigen imajiner murni dapat

Repository University Of Riau
PERPUSTAKAAN UNIVERSITAS RIAU
http://repository.unri.ac.id/

diperoleh dengan menguji sistem linier dimana ada perubahan yang demikian .

Perhatikan sistem :

$$\begin{aligned} x' &= \mu x - \omega y \\ y' &= \omega x + \mu y \end{aligned} \qquad \text{(2.3.2)}$$

yang mempunyai selesaian berbentuk :

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = e^{\mu t} \begin{bmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \qquad \text{(2.3.3)}$$

Jika $\mu < 0$, selesaian berupa spiral yang menuju titik pusat., jika $\mu > 0$, selesaian berupa spiral yang meninggalkan titik pusat . dan jika $\mu = 0$, selesaian berupa senter (periodik).

Dengan transformasi koordinat yang licin, uraian taylor derajat tiga sistem (2.3.1) bisa dibawa kebentuk *normal* :

$$\begin{aligned} x' &= (d\mu + a(x^2 + y^2))x - (\omega + c\mu + b(x^2 + y^2)) y \\ y' &= (\omega + c\mu + b(x^2 + y^2)) x - (d\mu + a(x^2 + y^2)) y \end{aligned} \qquad \text{(2.3.4)}$$

Jika ditransformasi ke koordinat polar, (2.3.4) menjadi :

$$\begin{aligned} r' &= (d\mu + ar^2)r \\ \theta' &= (\omega + c\mu + br^2) \end{aligned} \qquad \text{(2.3.5)}$$

Karena r' bebas terhadap θ, maka ada orbit periodik berupa lingkaran r = konstan, yang di dapat dari selesaian tak nol dari $r' = 0$. Jika $a \neq 0 \neq d$, selesaian -selesaian ini berada di sepanjang parabola $\mu = -ar^2 / d$. Hal ini mengakibatkan orbit-orbit periodik mempunyai garis singgung kuadratis dengan bidang singgung $\mu = 0$ dalam $R^2 \times R$.

Repository University Of Riau
PERPUSTAKAAN UNIVERSITAS RIAU
http://repository.unri.ac.id/

Teorema bifurkasi Hopf menyatakan sifat-sifat kualitatif dari sistem persamaan diatas di dekat titik pangkal yang tak berubah jika suku-suku order tinggi ditambahkan dalam sistem.

Teorema (Hopf (1942)) 4 :

Misalkan sistem (4) mempunyai titik tetap (x_0, y_0) yang memenuhi sifat-sifat :

(H1). $D_x f_\mu (x_0)$ mempunyai sepasang nilai eigen imajiner murni sederhana dan tak ada nilai eigen lain dengan bagian riil nol. maka (H1) mengakibatkan ada suatu kurva licin $(x(\mu), \mu)$ dengan $\mu(x_0) = x_0$. Nilai eigen nilai eigen $\lambda(\mu)$ dan $\overline{\lambda}(\mu)$ dari $D_x f_{\mu_0} (x(\mu))$ menjadi imajiner pada $\mu = \mu_0$ yang licin terhadap μ. Jika lebih lanjut :

(H2). $$\frac{d}{d\mu} (Re\, \lambda (\mu))\Big|_{\mu = \mu_0} = d \neq 0$$

maka ada manifold pusat tunggal dimensi tiga yang melalui (x_0, μ_0) dalam $R^n \times R$ dan suatu sistem koordinat licin (yang mengawetkan bidang μ = konstan), dimana ekspansi Taylor derajat tiga pada manifold pusat diberikan oleh :

$$x' = (d\mu + a (x^2 + y^2))x - (\varpi + c\mu + b (x^2 + y^2))y$$
$$y' = (\varpi + c\mu + b (x^2 + y^2))x - (d\mu + a (x^2 + y^2))y \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.3.6)$$

Jika $a \neq 0$, maka ada suatu selesaian periodik dalam manifold pusat yang mempunyai persinggungan kuadratik dengan ruang eigen $(\lambda (\mu_0), \overline{\lambda (\mu_0)})$ sesuai dengan order kedua, dengan paraboloida $\mu = -(a \ d)(x^2 + y^2)$. Jika $a < 0$, maka selesaian-selesaian peripodik penolak.

Repository University Of Riau
PERPUSTAKAAN UNIVERSITAS RIAU
http://repository.unri.ac.id/

Teorema ini tidak dibuktikan di sini. Pada contoh-contoh berikut akan ditunjukan proses terjadinya bifurkasi Holf seperti disebutkan dalam teorema diatas.

Contoh 1 :

$$\begin{aligned} x' &= -y + \mu x - x(x^2 + y^2) \\ y' &= x + \mu y - y(x^2 + y^2) \end{aligned} \qquad (2.3.7)$$

Titik (x,y) = (0,0) yaitu sumbu μ merupakan titik tetap. Matriks Jacobian dari pelinieran di (0,0) adalah :

$$Df(0,0) = \begin{bmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{bmatrix} \qquad (2.3.8)$$

sehingga nilai eigennya adalah :

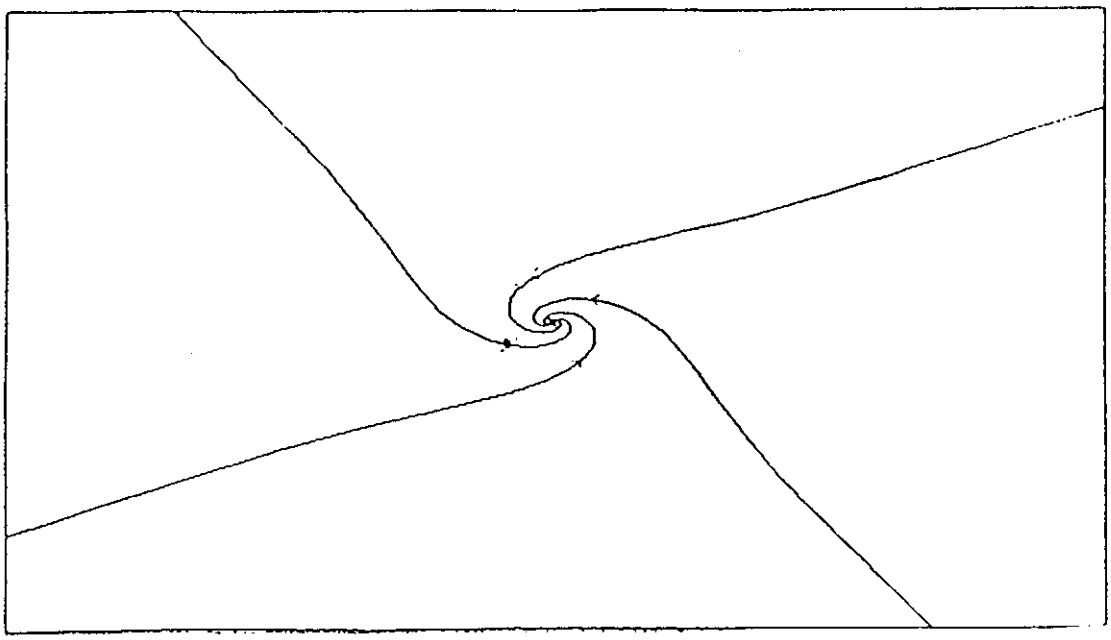
$$\lambda_{1,2} = \mu \pm i \qquad (2.3.9)$$

Dari pelinieran disekitar titik tetap (0,0), maka titik (0,0) stabil untuk $\mu < 0$ dan tak stabil untuk $\mu > 0$. Namun pada $\mu = 0$ nilai eigennya imajiner murni. Selanjutnya jika dihitung, $\frac{d}{d\mu}(Re\,\lambda(\mu))\big|_{\mu=0} = 1$, dan ini memenuhi (H2) dalam teorema (4). Dengan demikian semua kondisi teorema (4) dipenuhi.

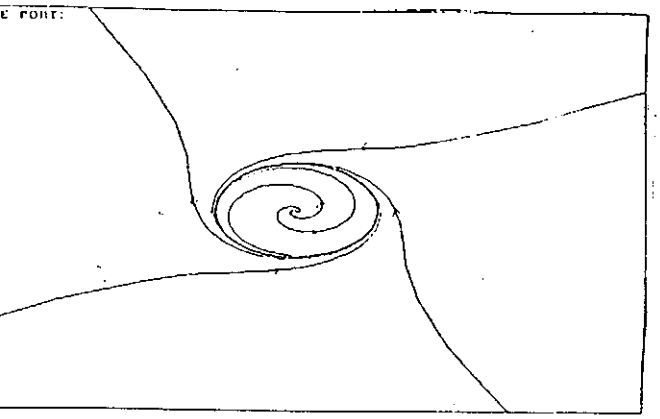
Diagram bifurkasi dari contoh 1 adalah sebagai berikut :

Repository University Of Riau
PERPUSTAKAAN UNIVERSITAS RIAU
http://repository.unri.ac.id/

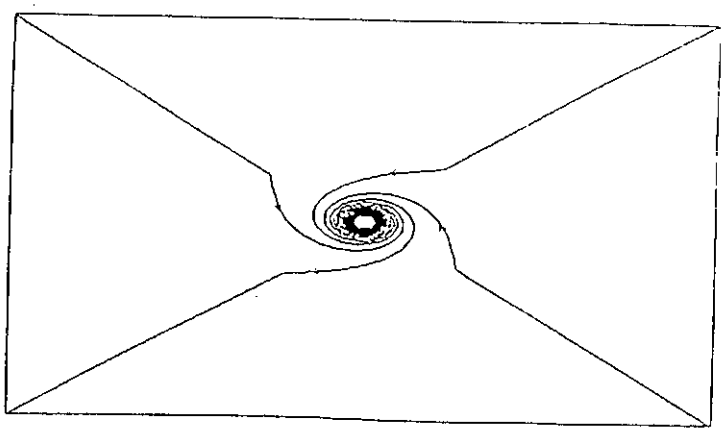
Beberapa gambar bidang fase dari persamaan (2.3.7) untuk nilai-nilai parameter μ tertentu :



Gambar 2.3.1.a. Bidang fase persamaan (2.3.7) untuk $\mu < 0$.
Titik (0.0) stabil.



ar 3.1.b. Bidang fase persamaan (2.3.7) untuk $\mu > 0$. titik (0,0) tak stabil dan ada limit cycle stabil $r^2 = \mu$.



Gambar 3.1.c. Bidang fase persamaan (2.3.7) untuk $\mu = 0$. Titik (0,0) stabil.

Repository University Of Riau
PERPUSTAKAAN UNIVERSITAS RIAU
http://repository.unri.ac.id/