BAB II

KESTABILAN SISTEM PERSAMAAN DIFERENSI

Pada bab ini diberikan teori pendukung untuk memperoleh hasil yang diinginkan yang antara lain dibahas mengenai solusi sistem persamaan diferensi, matriks fundamental beserta beberapa sifatnya dan kestabilan dari sistem persamaan diferensi.

2.1. Solusi Sistem Persamaan Diferensi

Pada bagian ini akan dipelajari solusi dari sistem persamaan linear

$$x(n+1) = A\, x(n) \tag{2.1.1}$$

dengan $x(n) = (x_1(n), x_2(n), \ldots, x_k(n))^T \in R^k$ dan A matriks bilangan real non singular yang berukuran $k \times k$. Sistem (2.1.1) disebut sistem autonomous, karena nilai dari A konstan.

Jika untuk suatu $n_0 \geq 0, x(n_0) = n_0$ maka sistem (2.1.1) disebut masalah nilai awal. Selanjutnya dengan iterasi atau substitusi langsung, diperoleh solusi dari sistem (2.1.1) sebagai berikut :

$$x(n, n_0, x_0) = A^{n-n_0} x_0 \qquad (2.1..2)$$

dengan $A^0 = I$, yaitu matrik identitas kxk. Catat bahwa $x(n_0, n_0, x_0) = x_0$.

Jika $n_0 = 0$ maka solusi dalam bentuk (2.1.2) dapat ditulis sebagai $x(n, x_0)$ atau $x(n)$. Tanpa mengurangi keumuman , diasumsikan $n_0 = 0$, sehingga jika dimisalkan $y(n - n_0) = x(n)$ maka persamaan (2.1.1) menjadi

$$y(n+1) = Ay(n) \tag{2.1.3}$$

dengan $y(0) = x(n_0)$ dan

$$y(n) = A^n y(0) \tag{2.1.4}$$

Sekarang tinjau sistem persamaan diferensi non autonomous

$$x(n+1) = A(n)x(n), \tag{2.1.5}$$

dengan $A(n) = (a_{ij}(n))$ adalah fungsi matriks non singular yang berukuran kxk, dan sistem tak homogennya adalah

$$y(n+1) = A(n)y(n) + g(n), \tag{2.1.6}$$

dengan $g(n) \in R^k$.

Berikut ini diberikan Teorema yang menyatakan keberadaan dan ketunggalan dari solusi (2.1.5).

Teorema 2.1.1. Untuk setiap $x_0 \in R^k$ dan $n_0 \in Z^+$, terdapat solusi tunggal $x(n, n_0, x_0)$ dari persamaan (2.1.5) dengan $x(n_0, n_0, x_0) = x_0$.

Bukti: Dari persamaan (2.1.5) diperoleh

$$x(n_0+1, n_0, x_0) = A(n_0)x(n_0) = A(n_0)x_0$$

$$x(n_0+2, n_0, x_0) = A(n_0+1)x(n_0+1) = A(n_0+1)A(n_0)x_0$$

secara induktif diperoleh

$$x(n, n_0, x_0) = \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} A(i)\right] x_0 \tag{2.1.7}$$

dengan

$$\prod_{i=n_0}^{n-1} A(i) = \begin{cases} A(n-1)A(n-2)\ldots A(n_0) & \text{jika } n > n_0 \\ I & \text{jika } n = n_0 \end{cases}$$

persamaan (2.1.7) adalah solusi tunggal untuk persamaan (2.1.5). ■

Misalkan $\phi(n)$ matriks kxk yang kolom-kolomnya adalah solusi dari persamaan (2.1.5), yaitu

$$\phi(n) = [x_1(n), x_2(n), \ldots, x_k(n)].$$

Sehingga

$$\begin{aligned}\phi(n+1) &= [A(n)x_1(n), A(n)x_2(n), \ldots, A(n)x_k(n)] \\ &= A(n)[x_1(n), x_2(n), \ldots, x_k(n)] \\ &= A(n)\phi(n)\end{aligned}$$

Jadi $\phi(n)$ matriks yang memenuhi persamaan diferensi

$$\phi(n+1) = A(n)\phi(n) \tag{2.1.8}$$

Selanjutnya solusi $x_1(n), x_2(n), \ldots, x_k(n)$ bebas linier untuk $n \geq n_0$ jika dan hanya jika matriks $\phi(n)$ non singular atau det($\phi(n)$) $\neq 0$, untuk semua $n \geq n_0$. Tepatnya diberikan pada definisi berikut.

Definisi 2.1.1. Jika $\phi(n)$ adalah matriks non singular untuk semua $n \geq n_0$ dan memenuhi persamaan (2.1.8), maka $\phi(n)$ dikatakan matriks fundamental untuk sistem persamaan (2.1.5).

Catat bahwa jika $\phi(n)$ matriks fundamental dan C matriks non singular , maka $\phi(n)$C juga matriks fundamental. Dengan demikian suatu sistem memiliki banyak matriks fundamental. Tetapi hanya satu matriks fundamental yang digunakan, yaitu

$\phi(n) = \prod_{i=n_0}^{n-1} A(i)$, dengan $\phi(n_0) = I$.

Teorema 2.1.2. Terdapat solusi tunggal $\psi(n)$ dari persamaan matriks (2.1.8) dengan $\psi(n_0) = I$.

Bukti : Lihat Elaydi, S.

Selanjutnya dapat dimulai dengan sebarang matriks fundamental $\phi(n)$, kemudian matriks fundamental $\phi(n)\phi^{-1}(n_0)$, matriks fundamental khusus dinyatakan dengan $\phi(n,n_0)$ yang disebut dengan matriks transisi. Dalam bentuk umum ditulis $\phi(n,m) = \phi(n)\phi^{-1}(m)$, untuk setiap n,m bilangan bulat positif dan $n \geq m$.

Dari teorema 2.1.2 di atas diperoleh beberapa akibat berikut.

Akibat 2.1.1. Solusi tunggal dari persamaan (2.1.5) dengan $x(n_0,n_0,x_0) = x_0$ adalah $x(n,n_0,x_0) = \phi(n,n_0)x_0$.

Akibat 2.1.2. Matriks fundamental $\phi(n)$ non singular untuk semua $n \geq n_0$. Jika dan hanya jika $\phi(n_0)$ non singular.

Teorema 2.1.3. Terdapat k solusi bebas linear dari sistem (2.1.5) untuk $n \geq n_0$.

Akibat 2.1.4. Himpunan S semua solusi dari persamaan (2.1.5) membentuk ruang linear berdimensi k .

Kombinasi linear dari solusi dari (2.1.5) juga merupakan solusi dari (2.1.5). Berdasarkan kenyataan ini didefinisikan solusi umum dari persamaan diferensi (2.1.5).

Definisi 2.1.2. Misalkan $\{x_i(n) \mid 1 \leq i \leq k\}$ sebarang himpunan solusi dari (2.1.5) yang bebas linear , solusi umum dari persamaan (2.1.5) didefinisikan dengan

$$\sum_{i=1}^{k} C_i x_i(n) \tag{2.1.9}$$

dengan $C_i \in R$ dan paling sedikit satu dari $C_i \neq 0$.

Persamaan (2.1.9) dapat ditulis sebagai

$$x(n) = \phi(n)C, \qquad (2.1.10)$$

dengan $\phi(n) = [x_1(n), x_2(n), \ldots, x_k(n)]$ adalah matriks fundamental dan $C = [C_1, \ldots, C_k]^T \in R^k$.

Selanjutnya akan ditinjau solusi khusus $y_p(n)$ dari sistem (2.1.6) sebagai sebarang k- fungsi vektor yang memenuhi sistem diferensi tak homogen. Dengan demikian solusi y(n) dari sistem (2.1.6) dapat ditulis sebagai

$$y(n) = \phi(n)C + y_p(n).$$

Lemma 2.1.1. Solusi khusus dari persamaan (2.1.6) adalah

$$y_p(n) = \sum_{r=r_0}^{n-1} \phi(n, r+1)g(r), \text{ dengan } y_p(n_0) = 0.$$

Bukti : Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} y_p(n+1) &= \sum_{r=n_0}^{n} \phi(n+1, r+1)g(r) \\ &= \sum_{r=n_0}^{n-1} A(n)\phi(n, r+1)g(r) + \phi(n+1, n+1)g(n) \\ &= A(n)y(n) + g(n) \end{aligned}$$

jadi $y_p(n)$ adalah solusi dari sistem (2.1.6) dan $y_p(n_0) = 0$.

Teorema 2.1.4. Solusi tunggal dari masalah nilai awal $y(n+1) = A(n)y(n) + g(n)$, $y(n_0) = y_0$ adalah

$$y(n, n_0, y_0) = \phi(n, n_0)y_0 + \sum_{r=r_0}^{n-1} \phi(n, r+1)g(r)$$

atau $$y(n, n_0, y_0) = \left(\prod_{i=n_0}^{n-1} A(i)\right)y_0 + \sum_{r=r_0}^{n-1}\left(\prod_{i=r+1}^{n-1} A(i)\right)g(r).$$

2.2. Sistem Linear Periodik

Pandang sistem linear Periodik

$$x(n+1) = A(n)x(n) \tag{2.2.1}$$

dengan $n \in Z$, $A(n+N)=A(n)$ untuk suatu bilangan bulat positif N.

Lema 2.2.1. Misalkan B matriks nonsingular yang berukuran k x k dan m sebarang bilangan bulat pasitif, maka terdapat matriks C_{kxk} sehingga $C^m = B$.

Bukti : Lihat Elaydi, S (1996).

Lema 2.2.2. Sistem (2.2.1) memenuhi pernyataan berikut

(i) Jika $\phi(n)$ matriks fundamental maka $\phi(n+N)$ juga matrks fundamental.

(ii) $\phi(n+N) = \phi(n)C$ untuk suatu matrik nonsingular C

(iii) $\phi(n+N,N) = \phi(n,0)$.

Bukti : Lihat Elaydi, S (1996).

Teorema 2.2.1. Untuk setiap matriks fundamental $\phi(n)$ sistem (2.2.1), terdapat matriks periodik nonsingular P(n) dengan periode N sehingga

$$\phi(n) = P(n)B^n \tag{2.2.2}$$

Bukti : Lihat Elaydi, S (1996).

Lema 2.2.3. Jika $\phi(n)$ dan $\psi(n)$ matriks fundamental dari persamaan (2.2.1) sehingga

$$\phi(n+N) = \phi(n)C$$

$$\psi(n+N) = \psi(n)E$$

maka C dan E matriks non singular.

Lema 2.2.4. Suatu bilangan kompleks λ adalah eksponen Floguet dari (2.2.1) jika dan hanya jika terdapat solusi tak trivial dari persamaan (2.2.1) dalam $\lambda^n g(n)$ dengan *g(n)* merupakan fungsi vektor dengan $g(n+N) = g(n)$ untuk semua n.

Bukti: Misalkan λ adalah eksponen Floguet dari (2.2.1), maka $\det(B^n - \lambda^n I)x_0 = 0$. Pilih $x_0 \in R^k, x_0 \neq 0$, sehingga $(B^n - \lambda^n I)x_0 = 0$, untuk setiap n atau $B^n x_0 = \lambda^n x_0$. Jadi $P(n)B^n x_0 = \lambda^n P(n)x_0$, dengan P(n) matriks periodik yang didefinisikan (2.2.2). Dengan menggunakan (2.2.2) tersebut diperoleh

$$x(n,n_0,x_0) = \phi(n,n_0)x_0$$

$$= \mathrm{P(n)B}^n x_0$$

$$= \lambda^n P(n)x_0$$

$$= \lambda^n q(n)$$

Jadi $\lambda^n q(n)$ adalah solusi periodik dari persamaan (2.2.1) dengan $q(n)=P(n)x_0$.

Sebaliknya misalkan $\lambda^n q(n)$, $q(n+N) = q(n) \neq 0$, adalah solusi dari (2.2.1). Dengan menggunakan teorema 2.2.1 diperoleh

$$\lambda^n q(n) = \mathrm{P(n)B}^n x_0 \qquad (2.2.3)$$

untuk suatu vektor tak nol x_0; dan

$$\lambda^{n+N} q(n) = \mathrm{P(n)B}^{n+N} x_0 \qquad (2.2.4)$$

tetapi dari persamaan (2.2.3) diperoleh

$$\lambda^{n+N} q(n) = \lambda^n \mathrm{P(n)B}^n x_0 \qquad (2.2.5)$$

Dari (2.2.4) dan (2.2.5) diperoleh $P(n)B^n[B^n - \lambda^n I]x_0 = 0$ sehingga $\det(B^N - \lambda^N I)x_0 = 0$. Hal ini menyatakan bahwa λ adalah eksponen Floguet dari (2.2.1). ■

Dari lema 2.2.4 diperoleh akibat berikut.

Akibat 2.2.1 Pernyataan berikut terpenuhi

(i) Sistem (2.2.1) mempunyai solusi periodik dengan perioda N jika mempunyai multiplier Floguet $\lambda = 1$.

(ii) Jika terdapat multiplier Floguet, $\lambda = -1$ maka sistem (2.2.1) mempunyai solusi periodik dengan $2N$.

2.3. Kestabilan Sistem Persamaan Diferensi

Perhatikan persamaan diferensi

$$x(n+1) = f(n, x(n)), \qquad x(n_0) = x_0 \tag{2.3.1}$$

dengan $x(n) \in \mathrm{R}^k$, $f : Z^+ \mathrm{x} R^k \to R^k$.

Asumsikan $f(n,x)$ kontinu di x. Suatu titik $x^* \in R^k$ disebut titik equilibrium (titik keseimbangan) dari persamaan (2.3.1) jika $f(n, x^*) = x^*$ untuk setiap $n \geq n_0$.

Catat bahwa x^* diasumsikan titik 0 dan disebut solusi nol, tetapi kita tidak mengasumsikan $x^* = 0$ kecuali jika hal tersebut sesuai untuk dilakukan.

Definisi berikut ini akan mengenalkan beberapa jenis kestabilan dari titik equilibrium x^* dari persamaan (2.3.1).

Definisi 2.3.1. Titik equilibrium x^* dari persamaan (2.3.1) dikatakan

(i) Stabil jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ dan $n_0 \geq 0$ terdapat $\delta = \delta(\varepsilon, n_0)$ sehingga jika $\|x_0 - x^*\| < \delta$ maka $\|x(n, n_0, x_0) - x^*\| < \varepsilon$ untuk setiap $n \geq n_0$.

(ii) Stabil seragam jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta(\varepsilon) > 0$ sehingga jika $n_0 \leq n_1 \in N(n_0)$ dan $\|x_0 - x^*\| < \delta$ maka $\|x(n, n_0, x_0) - x^*\| < \varepsilon$

(iii) Stabil asimtotik jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta(\varepsilon) > 0$ sehingga jika $\|x_0 - x^*\| < \delta$ maka $\|x(n, n_0, x_0) - x^*\| = 0$ untuk setiap $n \geq n_0$.

(iv) Stabil Lipschitz jika terdapat $\delta > 0$ dan $M \geq 0$, sehingga $\|x(n, n_0, x_0) - x^*\| \leq M\|x_0 - x^*\|\eta^{n-n_0}$ untuk $\|x_0 - x^*\| < \delta$

(v) Suatu solusi $x(n, n_0, x_0)$ adalah terbatas jika terdapat konstanta $M \geq 0$ sehingga $\|x(n, n_0, x_0)\| \leq M$ untuk setiap $n \geq n_0$.

Selanjutnya akan kita tinjau kestabilan dari sistem linear non autonomous.

$$x(n+1) = A(n)x(n), \qquad n \geq n_0 \geq 0 \tag{2.3.2}$$

dengan asumsi bahwa $A(n)$ nonsingular untuk $n \geq n_0$. Hasil yang diperoleh untuk sistem (2.3.2) juga dikhususkan untuk sistem linear autonomous

$$x(n+1) = A\,x(n). \tag{2.3.3}$$

Jika $\phi(n)$ sebarang matriks fundamental dari sistem (2.3.2) dan (2.3.3), maka $\phi(n,m) = \phi(n)\phi^{-1}(m)$ adalah matriks transisi. Selanjutnya untuk sistem (2.3.3), $\phi(n,m) = \phi(n-m) = e^{A(n-m)}$.

Syarat kestabilan dari matriks fundamental $\phi(n)$ untuk sistem (2.3.2), akan dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 2.3.1. Solusi nol dari sistem (2.3.2)

(i) Stabil jika dan hanya jika terdapat konstanta positif M sehingga

$$\|\phi(n)\| \leq M, \text{ untuk } n \geq n_0 \geq 0 \tag{2.3.4}$$

(ii) Stabil seragam jika dan hanya jika terdapat konstanta positif M sehingga

$$\|\phi(n,m)\| \leq M, \text{ untuk } n_0 \leq m \leq n < \infty \tag{2.3.5}$$

(iii) Stabil asimtotik jika dan hanya jika

$$\lim_{n\to\infty} \|\phi(n)\| = 0 \qquad (2.3.6)$$

(iv) Stabil asimtotik seragam jika dan hanya jika terdapat konstanta positif M dan $\eta \in (0,1)$ sehingga

$$\|\phi(n,m)\| \leq M\eta^{n-m} \text{ untuk } n_0 \leq m \leq n < \infty \qquad (2.3.7)$$

Bukti : Tanpa mengurangi perumuman asumsikan $\phi(n_0) = I$, karena syarat (2.3.4) sampai dengan (2.3.7) benar untuk setiap matriks fundamental jika salah satu terpenuhi maka $x(n,n_0,x_0)=\phi(n)x_0$.

(i) Misalkan ketaksamaan (2.3.4) terpenuhi, maka $\|x(n,n_0,x_0)\| \leq M\|x_0\|$. Kemudian ambil $\varepsilon > 0$ dan pilih $\delta \leq M/\varepsilon$, maka $\|x_0\| < \delta$ memenuhi $\|x(n,n_0,x_0)\| \leq \varepsilon$. Jadi solusi nol stabil. Sebaliknya misalkan $\|x(n,n_0,x_0)\| \leq \|\phi(n)x_0\| < \varepsilon$ bila $\|x_0\| \leq \delta$ atau $\frac{1}{\delta}\|x_0\| \leq 1$, maka $\|\phi(n)\| = \sup\limits_{\|\xi\|\leq 1}\|\phi(n)\xi\| = \frac{1}{\delta}\sup\limits_{\|x_0\|\leq\delta}\|\phi(n)x_0\| \leq \frac{\varepsilon}{\delta} = M$

(iv) Misalkan (2.3.7) terpenuhi, berdasarkan (ii) maka solusi nol dari sistem (2.3.2) stabil seragam. Misalkan $\varepsilon > 0$ dengan $0 < \varepsilon < M$, ambil $\mu = 1$ dan N sehingga $\eta^N < \varepsilon/M$. Jika $\|x_0\| < 1$ maka $\|x(n,n_0,x_0)\| \leq \|\phi(n)x_0\| \leq M\eta^{n-n_0} < \varepsilon$, untuk $n \geq n_0 + N$. Jadi solusi nol dari (2.3.2) stabil asimtotik seragam.

Sebaliknya misalkan solusi nol dari (2.3.2) stabil asimtotik seragam, sehingga solusi nol tersebut stabil seragam dan dengan menggunakan bagian (ii) diperoleh $\|\phi(n,m)\| \leq M$, untuk $n_0 \leq m \leq n < \infty$. Dari sifat seragam, terdapat $\eta > 0$ sehingga untuk setiap ε, dengan $0 < \varepsilon < 1$ terdapat N sehingga

$\|\phi(n,n_0)x_0\| < \varepsilon$ untuk $n \geq n_0 + N$ dengan $\|x_0\| < \mu$. Maka untuk $n \in [n_0 + mN, n_0 + (m+1)N], m > 0$; diperoleh

$$\|\phi(n,n_0)\| \leq \|\phi(n,n_0+mN)\| \|\phi(n_0+mN, n_0+(m-1)N)\| ... \|\phi(n_0+N,n_0)\|$$

$$\leq M\varepsilon^m \leq M/\varepsilon(\varepsilon^{1/N})^{(m+1)N}$$

$$= \overline{M}\eta^{(m+1)N}, \text{dengan } \overline{M} = M/\varepsilon, \eta = \varepsilon^{1/N}$$

$$\leq \overline{M}\eta^{(n-n_0)}, \quad \text{untuk } mN \leq n - n_0 \leq (m+1)N$$

Jadi terdapat konstanta M dan $\eta \in (0,1)$ sehingga

$\|\phi(n,m)\| \leq M\eta^{n-m}$ untuk $n_0 \leq m \leq n < \infty$. ■

Dari teorema (2.3.1) di atas diperoleh akibat berikut ini.

Akibat 2.3.1. Sistem persamaan diferensi (2.3.2) memenuhi

(i) Solusi nolnya stabil jika dan hanya jika terbatas.

(ii) Solusi nolnya stabil eksponensial jika dan hanya jika stabil asimtotik.