BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Bila model kontinu untuk persamaan diferensial merupakan hal yang sangat menarik, tetapi ada beberapa kasus lebih sesuai apabila dalam bentuk model diskrit. Sebagai contoh kasus pertumbuhan populasi lebih cocok dengan model diskrit dari pada model kontinu, misalnya spesies yang generasinya tidak dalam waktu bersamaan menyebar pada interval tetap, sehingga seperti pada waktu tertentu dari tahun tertentu. Populasi y_{n+1} dari spesies dalam $n+1$ adalah suatu fungsi dari n dan dari populasi y_n di dalam tahun sebelumnya, yaitu :

$$y_{n+1} = f(n,y_n)\,,\quad n = 0,1,2,... \qquad (1.1.1)$$

Persamaan (1.1.1) disebut dengan persamaan diferensi orse pertama, dikatakan orde pertama karena bergantung pada nilai y_n , tetapi tidak bergantung pada nilai y_{n-1} , y_{n-2} dan seterusnya. Persamaan (1.1.1) linear jika f suatu fungsi linear dari y_n , dan dikatakan tak linear untuk lainnya.

Dari fenomena di atas dapat dipelajari kestabilan pada tahun nol, yaitu kita dapat menentukan jika pertubasi (gangguan) kecil pada waktu t awal pada tahun nol, menuju nol bila t bertambah (atau menuju ke suatu solisi stasionir bila t bertambah). Berdasarkan hal ini, untuk memperoleh solusi stasioner, perlu dianalisis kestabilan dari suatu pertubasi sistem persamaan diferensi.

Di dalam tulisan Medina, R., dan Pinto, M. [8], telah membahas h-stabil untuk persamaan diferensi, yaitu kestabilan eksponensial dan kestabilan Lipschitz seragam dibawah suatu pertubasi. Argawal, R.P. (1992 dan 1993), menggunakan metode variasi parameter untuk persamaan diferensi tak linear. Sementara itu Bainov, D. dan Simeonov, P. (1992), memberikan sistem pertubasi tak linear dengan sifat-sifat kestabilan.

Di dalam penelitian ini akan ditinjau sistem persamaan diferensi tak linear,

$$x(n+1) = f(n,x(n)), \tag{1.1.2}$$

dengan sistem variasional

$$Z(n+1) = f_x(n,x(n,n_0,x_0))z(n), \tag{1.1.3}$$

dan sistem pertubasi,

$$y(n+1) = f(n,y(n)) + g(n,y(n)), \tag{1.1.4}$$

dengan,

$$f,g : N_0 \, x \, R^m \to R^m \quad , N_0 = \{n_0, n_0 + 1, \ldots ,n_0 + k,\ldots\}$$

(n_0 suatu bilangan bulat tak negatif, untuk $n_0 = 0$, $N_0 = N$ himpunan bilangan bulat positif). Misalkan $f_x = \partial f/\partial x$ ada, kontinu dan punya invers pada $N_0 \, x \, R^m$ maka $f(n,0) = 0$ dan $x(n) = x(n, n_0, x_0)$ adalah solusi dari persamaan (1.1.3) dengan $x(n_0, n_0, x_0) = x_0$.

Di dalam tulisan ini akan diperluas kestabilan variasional pada sistem persamaan diferensi tak linear, yaitu akan diselidiki kriteria yang diberikan untuk menjamin persamaan pertubasi (1.1.4) mewarisi kestabilan dari persamaan original (1.1.2).

1.2. Tujuan Penelitian

Penelitian ini bertujuan untuk membahas tentang persamaan diferensi tak linear dan menentukan syarat perlu dan syarat cukup untuk solusi stasioner sistem persamaan diferensi tak linear stabil.

1.3. Perumusan Masalah

Di dalam tulisan Elaydi, S. dan Peterson, A. (1998), telah dibahas bahwa jika persamaan (1.1.2) stabil Lipschitz seragam maka persamaan (1.1.4) juga stabil Lipschitz seragam. Maka dalam penelitian ini akan dipelajari persamaan pertubasi (1.1.4) dengan mengasumsikan bahwa persamaan original (1.1.2) h-stabil, dan pertubasi $g = g(n,y)$, memenuhi :

$$|g(n,y)| \leq \sum_{i=1}^{p} \lambda_i(n)\omega_i(|y|), p \in N$$

dengan

$\lambda_i : N_0 \to [0,\infty)$, $(1 \leq i \leq p)$ fungsi summable dan

$\omega_i : [0,\infty) \to [0,\infty)$, $(1 \leq i \leq p)$ fungsi tak naik dan positif pada $[0,\infty)$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa dengan syarat tertentu solusi nol dari persamaan (1.1.4) h-stabil. Kemudian persamaan (1.1.2) h-stabil di dalam persamaan variasional jika variasional (1.1.3) h-stabil.

1.4. Kontribusi Penelitian

Secara umum hasil dari penelitian ini merupakan pengembangan konsep persamaan diferensi tak linear, sedangkan secara khusus bermanfaat untuk menganalisa suatu model Matematika diskrit dalam bentuk persamaan diferensi tak linear.

1.5. Metodologi Penelitian

Penelitian ini dilakukan dalam bentuk studi pustaka dengan langkah-langkah analisis sebagai berikut:

Asumsikan bahwa persamaan (1.1.2) h-stabil dan

$$\int_0^1 | \phi(n,l+1,f(l,y(l))+\tau g(l,y(l))) | d\tau \le ch(n)h^{-1}(l+1), \text{ untuk } n \ge l+1 \ge n_0.$$

dengan $\phi(n,n_0,x(n, n_0, x_0))$ adalah matriks fundamental dari persamaan (1.1.3), maka

1. Jika pertubasi $g=g(n,y)$ yang didefinisikan pada persamaan (1.1.4), dan fungsi ω_i $(1 \le i \le p)$ memenuhi (H1) , dan $\int_0^\infty \frac{ds}{\omega_i(s)} = \infty$, kemudian untuk setiap i, $(1 \le i \le p)$, terdapat fungsi r_i , sehingga $\omega_i(\beta u) \le r_i(\beta)\omega_i(u)$, $\beta > 0, u > 0$. $\lambda_i : N \to [0,\infty)$ sehingga $\lambda_i(n)\, r_i(n)(h(n))h^{-1}(n+1) \in l_1(N_0)$, $(1 \le i \le p)$. Maka akan ditunjukkan bahwa jika $|y_0|$ cukup kecil dan $n_0 \ge 0$, maka solusi $y(n)=y(n,n_0,y_0)$ stabil unutk persamaan (1.1.4) yang memenuhi $|y(n)=y(n,n_0,y_0)| \le o(|y_0|)\, h(n)$, $n \ge n_0$ dengan $o(|y_0|) \to 0$, bila $|y_0| \to 0$. Kemudian jika $h(n) \to 0$, bila $n \to \infty$ maka persamaan (1.1.4) akan stabil asimtotik.

2. Jika $g=g(n,y)$ memenuhi $| g(n,y) | \le \sum_{i=1}^{p} \lambda_i(n) | y |^{\gamma_i}, p \in N$ dengan $\gamma_i \ge 1$ $(1 \le i \le p)$ konstan, $\lambda_i : N \to [0,\infty)$ positif dan $\lambda_i(n)\, (h(n))h(n+1) \in l_1(N_0)$ maka akan ditunjukkan persamaan (1.1.4) h-stabil.