Pengembangan dan Penerapan
Teorema dan Ketaksamaan Fagnano's dalam segitiga.

Musraini dan Rolan Pane
Jurusan Matematika FMIPA Universitas Riau

Abstrak

Dalam tulisan ini akan, dibahas dua buah konsep yaitu yang terkait dengan hubungan antar sisi-sisi dari sebarang segitiga dengan jari-jari lingkaran dalam dan jari-jari lingkaran luarnya. Dipihak lain karena perbandingnan jari-jari lingkaran dalam dan jari-jari lingkaran luar serta luas segitiga berkaitan dengan kontruksi segitiga dalam. Maka pada tulisan ini juga akan dibahas segitiga dalam yang mempunyai perimeter terkecil.

Kata Kunci : Incenter, Circumcenter, Ketaksamaan Aassila, Ketaksamaan Fagrano's

Abstract

In this paper, two concepts that are discussed are related to the relationship between the sides of any triangle with the incenter and circumcenter. On the other hand because ratio of the incenter and circumcenter and area of a triangle related to the construction of the triangle. So in this paper will also be discussed in a triangle that has the smallest perimeter.
Key Words : incenter, Circumcenter, Assila Inequality, Fagnano's Inequality.

1. Pendahuluan

Ketaksamaan geometri klasik (*Classical Geometric Inequalities*) meliputi ketaksamaan rata-rata aritmatika-geometri (*The AM-GM Inequality*), *Cauchy-Schwarz Inequality* dan *rearrangement inequality*. Dalam subbab ini hanya akan dijelaskan mengenai ketaksamaan rata-rata aritmatika-geometri (*The AM-GM Inequality*). Ternyata dalam segitiga memang sangat banyak dapat dikontruksi berbagai bentuk ketaksamaan. Misalnya tentang perbandingan sisi jika dari salah satu titik sudut ditarik garis ke sisi dihadapannya, persamaan ini dikenal dengan nama toerema Stewart's [2,3, 9,12,13 dan 14].

Kemudian karena untuk sebarang segitiga senantiasa dapat dikontruksi lingkaran luar, maka dapat pula dikontruksi hubungan antara sisi-sisi dari segitiga tersebut dengan panjang jari-jari lingkaran luar tersebut dalam bentuk ketaksamaan $a^2+b^2+c^2 \leq 9R^2$ lihat [5, 6, 8, 9, 14 dan 15]. Di pihak lain untuk sebarang segitiga kita juga senantiasa dapat mengkontruksi lingkaran luar, maka juga akan diperoleh ketaksamaan yang menghubungkan luas segitiga tersebut dengan panjang perimeternya terhadap jari-jari lingkaran luar yang menghasilkan persamaan $r = \frac{L\,\Delta ABC}{s}$, lihat [2, 5, 7, 14].

Dari kedua hubungan jari-jari lingkaran dalam dan lingkaran luar tersebut, yang paling menarik adalah hubungan antara kedua nya , yang ketaksamaan yang melibatkan hasilkali dari panjang sisi-sisi segitiga tersebut terhadap hasilkali jari-jari lingkaran dalam dan jari-jari lingkaran luar, seperti pada [1, 5 dan 12] yaitu $(abc)^2 \geq (6Rr)^3$. Kemudian Aassila dalam [6 dan 11] menghubungkan anda luas segitiga dengan perbandingan antara perkalian perimeter dari sisi-sisinya segitiga tersebut, hal ini dikenal dengan ketaksamaan Aassila.

Dipihak lain Teorema dan ketaksamaan yang bermula dari Fagnano's problem yaitu bagaimana menentukan segitiga *XYZ* yang perimeternya terpendek dalam sebuah segitiga lancip *ABC*. Maka berdasarkan kondisi di atas, dalam tulisan ini akan dibahas bagaimana menentukan hubungan antara luas segitiga dalam dengan luas segitiga yang semula.

2. Ketaksamaan antara Panjang Sisi-sisi Segitiga dengan Jari-jari Lingkaran Dalam dan Jari-jari Lingkaran Luar Segitiga.

Seperti yang telah dijelaskan di atas, bahwa untuk sebarang segitiga senantiasa dapat dikontruksi jari-jari lingkaran dalam dan jari-jari lingkaran luar. Maka berikut ini akan dibahas ketaksamaan antara perkalian dari sisi-sisi sebarang segitiga dengan perkalian jari-jari lingkaran dalam dan jari-jari lingkaran luar [3, 10 dan 15]. Namun sebelumnya dibahas beberapa konsep dasar yang akan digunakan dalam pembahasan selanjutnya [8, 14].

Teorema 2.1 Diberikan ΔABC dengan panjang sisi $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$, dan $\overline{AB} = c$. Jika G dan O masing-masing adalah *Centroid* dan *Circumcenter* dari ΔABC , maka berlaku

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq 9R^2 .$$

Bukti : lihat [3, 14]

Berikut ini adalah salah satu bentuk teorema dasar yang membahas hubungan perkalian sisi-sisi dari suatu segitiga terhadap perkalian jari-jari lingkaran dalam dan jari-jari lingkaran luar.

Teorema 2.2 Misalkan a, b, dan c adalah panjang sisi-sisi ΔABC dan s merupakan *semiperimeter*. Jika R adalah jari-jari lingkaran luar dan r adalah jari-jari lingkaran dalam ΔABC, maka berlaku

$$(abc)^2 \geq (6Rr)^3$$

Bukti : Berdasarkan Teorema 2.2 diperoleh

$$abc = 4R\, L\Delta ABC. \qquad (2.1)$$

Kemudian, dari Teorema.2.2 diperoleh

$$L\,\Delta ABC = r\,s. \qquad (2.2)$$

Substitusi persamaan (2.2) ke persamaan (2.1) sehingga diperoleh

$$abc = 4\ R\,r\,s. \qquad (2.3)$$

Bila ruas kiri dan kanan persamaan (2.3) dikuadratkan, akan diperoleh

$$(abc)^2 = 16(Rr)^2 s^2. \qquad (2.4)$$

Karena a, b, dan c bilangan real positif maka dengan menggunakan Teorema *The AM-GM Inequality* diperoleh

$$\frac{a+b+c}{3} \geq (abc)^{1/3}. \qquad (2.5)$$

Bila ruas kiri dan kanan persamaan (2.5) dipangkat tiga, maka diperoleh

$$\frac{(a+b+c)^3}{27} \geq abc$$

$$(a+b+c)^3 \geq 27\,abc \qquad (2.6)$$

karena $8s^3 = (a+b+c)^3$ maka persamaan (2.6) menjadi

$$8s^3 \geq 27\,abc. \qquad (2.7)$$

Substitusi persamaan (2.3) ke persamaan (2.7) sehingga diperoleh

$$8s^3 \geq 27(4Rrs). \qquad (2.8)$$

Bila ruas kiri dan kanan persamaan (2.8) dibagi dengan $4s$ maka dihasilkan

$$s^2 \geq \frac{27}{2}(Rr). \qquad (2.9)$$

Substitusikan persamaan (2.9) ke persamaan (2.4) sehingga diperoleh

$$(abc)^2 \geq (6Rr)^3. \qquad \blacksquare$$

Lema 3.1 Untuk sebarang ΔABC berlaku

$$4\sqrt{3}\, L\Delta ABC \leq \frac{9abc}{a+b+c}$$

Bukti : lihat [4,5].

Lema 3.2 Untuk sebarang ΔABC berlaku

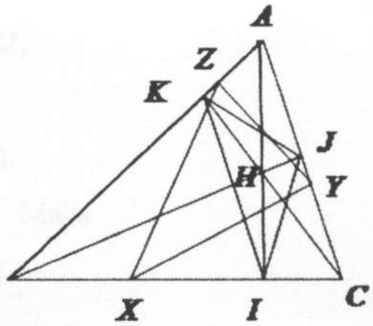
$$\min\{a^2+b^2+c^2, ab+bc+ca\} \geq 4\sqrt{3}\ \ L\Delta ABC$$

Bukti : lihat [3,8,]

Berikut ini akan ditunjukkan bahwa segitiga orthic merupakan segitiga yang memiliki luas terkecil.

Teorema 2.4. Misalkan bahwa *ABC* adalah segitiga lancip. Dari seluruh segitiga singgung yang ada di dalam *ABC*, segitiga *orthic*-nya yaitu segitiga *XYZ* adalah yang memiliki keliling terkecil.

Bukti : Misalkan *AI*, *BJ*, dan *CK* adalah garis tinggi (*altitude*) segitiga *ABC* dan *H* adalah orthocenter-nya. Anggap bahwa *X*, *Y*, *Z* adalah sebarang titik di masing-masing garis *BC*, *CA* dan *AB*. Perhatikan gambar 1, di peroleh



Gambar 1

$$YZ + ZX + XY$$

$$= \frac{YZ \cdot JK}{JK} + \frac{ZX \cdot KI}{KI} + \frac{XY \cdot IJ}{IJ}$$

$$\geq \frac{\overrightarrow{YZ} \cdot \overrightarrow{JK}}{JK} + \frac{\overrightarrow{ZX} \cdot \overrightarrow{KI}}{KI} + \frac{\overrightarrow{XY} \cdot \overrightarrow{IJ}}{IJ}$$

$$= \frac{(\overrightarrow{YZ} + \overrightarrow{JK} + \overrightarrow{KZ}) \cdot \overrightarrow{JK}}{JK} + \frac{(\overrightarrow{ZX} + \overrightarrow{KI} + \overrightarrow{IX}) \cdot \overrightarrow{KI}}{KI} + \frac{(\overrightarrow{XY} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JY}) \cdot \overrightarrow{IJ}}{IJ}$$

$$= JK + KI + IJ + \overrightarrow{XI} \cdot \left(\frac{\overrightarrow{IJ}}{IJ} + \frac{\overrightarrow{IK}}{IK}\right) + \overrightarrow{YJ} \cdot \left(\frac{\overrightarrow{JK}}{JK} + \frac{\overrightarrow{JI}}{JI}\right) + \overrightarrow{ZK} \cdot \left(\frac{\overrightarrow{KI}}{KI} + \frac{\overrightarrow{KJ}}{KJ}\right).$$

Karena ΔABC lancip, tingginya membagi dua sudut-sudut dalam (internal) dari segitiga *orthic*-nya yaitu *IJK*. Sehingga vektor-vektor

$$\frac{\overrightarrow{IJ}}{IJ}+\frac{\overrightarrow{IK}}{IK},\quad \frac{\overrightarrow{JK}}{JK}+\frac{\overrightarrow{JI}}{JI},\quad \frac{\overrightarrow{KI}}{KI}+\frac{\overrightarrow{KJ}}{KJ}$$

masing-masing tegak lurus terhadap vektor-vektor $\overrightarrow{XI}, \overrightarrow{YJ}, \overrightarrow{ZK}$. Sehingga

$$YZ+ZX+XY \geq JK+KI+IJ. \tag{2.10}$$

Jika kesamaan di (2.10) dipenuhi, maka vektor-vektor $\overrightarrow{YZ}, \overrightarrow{ZX}, \overrightarrow{XY}$ menunjukkan arah yang sama dengan masing-masing vektor-vektor $\overrightarrow{JK}, \overrightarrow{KI}, \overrightarrow{IJ}$. Oleh karena itu terdapat bilangan-bilangan positif α , β dan γ sedemikian hingga

$$\overrightarrow{YZ}=\alpha\overrightarrow{JK},\quad \overrightarrow{ZX}=\beta\overrightarrow{KI},\quad \overrightarrow{XY}=\gamma\overrightarrow{IJ}.$$

Sekarang diperoleh $\alpha\overrightarrow{JK}+\beta\overrightarrow{KI}+\gamma\overrightarrow{IJ}=\vec{0}$. Berdasarkan hal tersebut dan $\overrightarrow{JK}+\overrightarrow{KI}+\overrightarrow{IJ}=\vec{0}$ maka $\alpha=\beta=\gamma$. Sehingga,

$$\overrightarrow{YZ}=\alpha\overrightarrow{JK},\quad \overrightarrow{ZX}=\alpha\overrightarrow{KI},\quad \overrightarrow{XY}=\alpha\overrightarrow{IJ},$$

yang mengakibatkan

$$YZ=\alpha JK,\quad ZX=\alpha KI,\quad XY=\alpha IJ,$$

dan

$$YZ+ZX+XY=\alpha(JK+KI+IJ).$$

Katakan kesamaan di (2.10) dipenuhi, diperoleh $\alpha=\beta=\gamma=1$. Maka

$$\overrightarrow{YZ}=\overrightarrow{JK},\quad \overrightarrow{ZX}=\overrightarrow{KI},\quad \overrightarrow{XY}=\overrightarrow{IJ}.,$$

yang berarti bahwa masing-masing *X*, *Y*, *Z* berimpit dengan *I*, *J*, *K*.

Sebaliknya, jika *X*, *Y*, *Z* masing-masing berimpit dengan *I*, *J*, *K*, maka kesamaan di (2.10) dipenuhi.

Yang mengakibatkan ΔXYZ memiliki keliling terkecil bila *X*, *Y*, *Z* masing-masing berimpit dengan *I*, *J*, *K*.

3. Hasil Utama

.Misalkan diberikan ΔABC, katakanlah sebagai segitiga asal. Jika titik A_1 berada pada sisi $\overline{BC}$, B_1 berada pada sisi $\overline{AC}$, dan C_1 berada pada sisi $\overline{AB}$, kemudian titik A_1, B_1, dan C_1 dihubungkan, maka akan terbentuk empat segitiga dari ΔABC. Keempat segitiga yang tersebut yaitu ΔAC_1B_1, ΔC_1BA_1, $\Delta A_1B_1C_1$, dan ΔB_1A_1C. Dalam hal ini $\Delta A_1B_1C_1$ merupakan Segitiga Dalam.

Jika diberikan asumsi mengenai $L\Delta AC_1B_1$, $L\Delta C_1BA_1$, dan $L\Delta B_1A_1C$ dengan suatu ketaksamaan, maka akan ditunjukkan bahwa $L\Delta A_1B_1C_1$ bukanlah yang terkecil diantara keempat segitiga yang ada kecuali bila titik A_1, B_1, dan C_1 merupakan titik tengah pada sisi $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, dan $\overline{AB}$ [8]. Dalam pembahasan ini, untuk menentukan $L\Delta A_1B_1C_1$ berhubungan dengan *semiperimeter* ΔABC.

***Teorema* 3.1** Misalkan ABC adalah sebuah segitiga. Titik A_1 berada pada sisi $\overline{BC}$, B_1 berada pada sisi $\overline{AC}$, dan C_1 berada pada sisi $\overline{AB}$ sedemikian hingga $\Delta A_1B_1C_1$ merupakan Segitiga Dalam. Jika diasumsikan bahwa:

$$0 < L\Delta AC_1B_1 \le L\Delta C_1BA_1 \le L\Delta B_1A_1C$$

maka

$$L\Delta A_1B_1C_1 \ge \sqrt{L\Delta AC_1B_1\, L\Delta C_1BA_1}$$

Bukti : Misalkan diberikan ΔABC seperti Gambar 2 berikut. Titik A_1, B_1, dan C_1 membagi segmen garis $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ dan $\overline{AB}$ berturut-turut dengan rasio $x:x'$, $y:y'$, $z:z'$ sehingga

$$x+x' = y+y' = z+z' = 1$$

dengan $\frac{\overline{BA_1}}{\overline{BC}} = x$, $\frac{\overline{CA_1}}{\overline{BC}} = x'$, $\frac{\overline{CB_1}}{\overline{AC}} = y$, $\frac{\overline{AB_1}}{\overline{AC}} = y'$, $\frac{\overline{AC_1}}{\overline{AB}} = z$, dan $\frac{\overline{BC_1}}{\overline{AB}} = z'$.

Jika diasumsikan bahwa

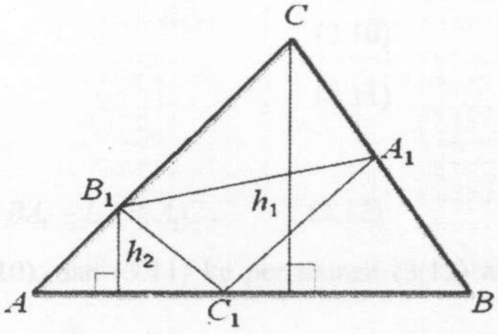
$0 < L\Delta AC_1B_1 \le L\Delta C_1BA_1 \le L\Delta B_1A_1C$

(3.1)

maka akan ditunjukkan

$L\Delta A_1B_1C_1 \ge \sqrt{L\Delta AC_1B_1\, L\Delta C_1BA_1}$.

(3.2) (3.1)



Gambar 2

Perhatikan Gambar 2, pada ΔABC berlaku

$L\Delta ABC = \frac{1}{2}\overline{AB}\;\overline{AC}\sin\angle A$

(3.3) (3.3)

persamaan (3.3) dapat ditulis

$$\sin \angle A = \frac{2\, L\Delta ABC}{\overline{AB}\ \overline{AC}} \ . \qquad (3.4)$$

Selanjutnya pada ΔAC_1B_1 berlaku

$$L\Delta AC_1B_1 = \frac{1}{2}\overline{AC_1}\ \overline{AB_1}\ \sin \angle A \ . \qquad (3.5)$$

Substitusikan persamaan (3.4) ke persamaan (3.5) sehingga diperoleh

$$L\Delta AC_1B_1 = \frac{\overline{AC_1}}{\overline{AB}}\ \frac{\overline{AB_1}}{\overline{AC}}\ L\Delta ABC \qquad (3.6)$$

karena $\frac{\overline{AC_1}}{\overline{AB}} = z$ dan $\frac{\overline{AB_1}}{\overline{AC}} = y'$ maka persamaan (3.6) menjadi

$$L\Delta AC_1B_1 = z\,y'(L\Delta ABC)\,. \qquad (3.7)$$

Dengan cara yang sama untuk mendapatkan persamaan (3.6), maka diperoleh

$$L\Delta C_1BA_1 = \frac{\overline{BC_1}}{\overline{AB}}\ \frac{\overline{BA_1}}{\overline{BC}}\ L\Delta ABC \qquad (3.8)$$

$$L\Delta B_1A_1C = \frac{\overline{CB_1}}{\overline{AC}}\ \frac{\overline{CA_1}}{\overline{BC}}\ L\Delta ABC. \qquad (3.9)$$

Karena $\frac{\overline{BC_1}}{\overline{AB}} = z'$, $\frac{\overline{BA_1}}{\overline{BC}} = x$, $\frac{\overline{CB_1}}{\overline{AC}} = y$, dan $\frac{\overline{CA_1}}{\overline{BC}} = x'$ maka persamaan (3.8) dan (3.9) menjadi

$$L\Delta C_1BA_1 = z'\,x(L\Delta ABC) \qquad (3.10)$$

$$L\Delta B_1A_1C = y\,x'(L\Delta ABC). \qquad (3.11)$$

Karena

$$L\Delta A_1B_1C_1 = L\Delta ABC - L\Delta AC_1B_1 - L\,\Delta C_1BA_1 - L\,\Delta B_1A_1C\,. \qquad (3.12)$$

maka dengan mensubsitusi persamaan (3.7), (3.10), dan (3.11) ke persamaan (3.12) akan diperoleh

$$\frac{L\Delta A_1B_1C_1}{L\Delta ABC} = 1 - (z\,y' + z'\,x + y\,x') \qquad (3.13)$$

karena $x + x' = y + y' = z + z' = 1$ maka persamaan (3.13) dapat ditulis menjadi

$$\frac{L\Delta A_1B_1C_1}{L\Delta ABC}=1-\left(\frac{z}{z+z'}\frac{y'}{y'+y}+\frac{z'}{z+z'}\frac{x}{x+x'}+\frac{y}{y+y'}\frac{x'}{x+x'}\right)$$

$$\frac{L\Delta A_1B_1C_1}{L\Delta ABC}=xyz+x'y'z'. \tag{3.14}$$

Berdasarkan Teorema *The AM-GM Inequality* maka persamaan (3.14) menjadi

$$\frac{L\Delta A_1B_1C_1}{L\Delta ABC}=xyz+x'y'z'\geq 2\sqrt{xyz\,x'y'z'}. \tag{3.15}$$

Dari persamaan (3.7), (3.10), (3.11), dan (3.15) diperoleh

$$\frac{L\Delta A_1B_1C_1}{L\Delta ABC}\geq 2\sqrt{\frac{L\Delta AC_1B_1}{L\Delta ABC}\,\frac{L\Delta C_1BA_1}{L\Delta ABC}\,\frac{L\Delta B_1A_1C}{L\Delta ABC}}. \tag{3.16}$$

Persamaan (3.1) hanya akan terbukti jika terjadi kemungkinan yaitu

$$L\Delta B_1A_1C<\frac{1}{4}L\Delta ABC \text{ ataupun } L\Delta B_1A_1C\geq\frac{1}{4}L\Delta ABC.$$

Jika $L\Delta B_1A_1C<\frac{1}{4}L\Delta ABC$ maka persamaan (3.1) menjadi

$$0<L\Delta AC_1B_1\leq L\,\Delta C_1BA_1\leq L\,\Delta B_1A_1C<\frac{1}{4}L\Delta ABC \tag{3.17}$$

sehingga dari persamaan (3.12) diperoleh

$$L\Delta A_1B_1C_1=L\Delta ABC-L\Delta AC_1B_1-L\,\Delta C_1BA_1-L\,\Delta B_1A_1C$$

$$L\Delta A_1B_1C_1\geq L\Delta ABC-\frac{1}{4}L\Delta ABC-\frac{1}{4}L\,\Delta ABC-\frac{1}{4}L\,\Delta ABC$$

$$\frac{1}{4}L\Delta ABC\leq L\Delta A_1B_1C_1. \tag{3.18}$$

Substitusi persamaan (3.18) ke persamaan (3.17) sehingga diperoleh

$$0<L\Delta AC_1B_1\leq L\,\Delta C_1BA_1\leq L\,\Delta B_1A_1C<\frac{1}{4}L\Delta ABC\leq L\Delta A_1B_1C_1. \tag{3.19}$$

Karena $0<L\Delta AC_1B_1\leq L\,\Delta C_1BA_1$, maka dengan menggunakan Teorema *The AM-GM Inequality* diperoleh

$$L\Delta AC_1B_1+L\Delta C_1BA_1\geq 2\sqrt{L\Delta AC_1B_1\;L\Delta C_1BA_1}. \tag{3.20}$$

Selanjutnya, dari persamaan (3.19) diketahui

$$L\Delta AC_1B_1 \le L\Delta C_1BA_1 \le L\Delta A_1B_1C_1$$

maka

$$2L\Delta A_1B_1C_1 \ge L\Delta AC_1B_1 + L\Delta C_1BA_1 \qquad (3.21)$$

dari persamaan (3.20) dan (3.21) diperoleh

$$2L\Delta A_1B_1C_1 \ge 2\sqrt{L\Delta AC_1B_1 \; L\Delta C_1BA_1}\,. \qquad (3.22)$$

Bila ruas kiri dan kanan persamaan (3.22) dibagi 2 maka diperoleh

$$L\Delta A_1B_1C_1 \ge \sqrt{L\Delta AC_1B_1 \; L\Delta C_1BA_1}\,.$$

Selanjutnya, jika $L\Delta B_1A_1C \ge \frac{1}{4} L\Delta ABC$ maka dari persamaan (3.16) diperoleh

$$\frac{L\Delta A_1B_1C_1}{L\Delta ABC} \ge 2\sqrt{\frac{L\Delta AC_1B_1}{L\Delta ABC}\,\frac{L\Delta C_1BA_1}{L\Delta ABC}\,\frac{\frac{1}{4}L\Delta ABC}{L\Delta ABC}}$$

$$\frac{L\Delta A_1B_1C_1}{L\Delta ABC} \ge \sqrt{\frac{L\Delta AC_1B_1}{L\Delta ABC}\,\frac{L\Delta C_1BA_1}{L\Delta ABC}}\,. \qquad (3.23)$$

Bila ruas kiri dan kanan persamaan (3.23) dikali dengan $L\Delta ABC$ maka diperoleh

$$L\Delta A_1B_1C_1 \ge \sqrt{L\Delta AC_1B_1 \; L\Delta C_1BA_1}$$

tanda sama dengan akan terpenuhi jika dan hanya jika $xyz = x'y'z'$ dan

$$L\Delta AC_1B_1 = L\Delta C_1BA_1 = L\Delta B_1A_1C = L\Delta A_1B_1C_1 = \frac{1}{4}L\Delta ABC\,.$$

Oleh karena itu, dari persamaan (3.27) akan diperoleh $x = y = z = 1/2$

karena $\frac{\overline{BA_1}}{\overline{BC}} = x$, $\frac{\overline{CB_1}}{\overline{AC}} = y$, dan $\frac{\overline{AC_1}}{\overline{AB}} = z$ maka

$$\frac{\overline{BA_1}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{CB_1}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC_1}}{\overline{AB}} = \frac{1}{2} \qquad (3.24$$

sehingga dari persamaan (3.24 diperoleh

$$\overline{BC} = 2\,\overline{BA_1}\,,\; \overline{AC} = 2\,\overline{CB_1}\,,\text{ dan } \overline{AB} = 2\,\overline{AC_1}$$

ini berarti bahwa A_1, B_1, dan C_1 merupakan titik tengah dari sisi $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, dan $\overline{BC}$. ■

***Teorema* 3.2** Misalkan ABC adalah sebuah segitiga, dan misalkan titik A_1, B_1, dan C_1 adalah titik-titik yang berada pada sisi $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, dan $\overline{AB}$, dengan syarat titik A_1, B_1, dan

C_1 tersebut tidak bertepatan dengan titik A, B, dan C. Jika s adalah *semiperimeter* ΔABC dan

$$\frac{\overline{AB}+\overline{BA_1}}{\overline{AC}+\overline{CA_1}}=\frac{\overline{BC}+\overline{CB_1}}{\overline{AB}+\overline{AB_1}}=\frac{\overline{AC}+\overline{AC_1}}{\overline{BC}+\overline{BC_1}}=\alpha \qquad (3.25)$$

maka

$$4\ L\Delta A_1B_1C_1 \le L\Delta ABC + s^4\left(\frac{\alpha-1}{\alpha+1}\right)^2 (L\Delta ABC)^{-1}\ . \qquad (3.26$$

Bukti : Perhatikan Gambar 4. Diberikan ΔABC dengan panjang sisi $\overline{BC}=a$, $\overline{AC}=b$, dan $\overline{AB}=c$. Jika diketahui persamaan (3.25) maka akan ditunjukkan persamaan (3.26 berlaku. Untuk ΔAC_1B_1 pada persamaan (3.6), selanjutnya akan dihitung panjang $\overline{AC_1}$ dan $\overline{AB_1}$ dengan menggunakan $K\Delta ABC=\overline{BC}+\overline{AC}+\overline{AB}$. Misalkan $K\Delta ABC=2s$ maka diperoleh

$$2s=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC} \qquad (3.27)$$

dengan mengganti $\overline{AB}=\overline{AC_1}+\overline{BC_1}$ maka persamaan (3.27) menjadi

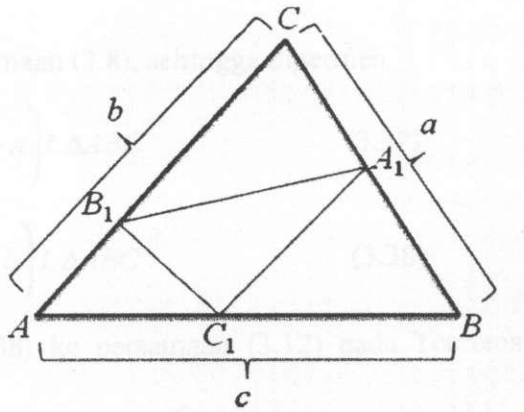
$$2s=\left(\overline{AC}+\overline{AC_1}\right)+\left(\overline{BC}+\overline{BC_1}\right). \qquad (3.28)$$

Karena $\dfrac{\overline{AC}+\overline{AC_1}}{\overline{BC}+\overline{BC_1}}=\alpha$ maka

$\overline{BC}+\overline{BC_1}=\dfrac{1}{\alpha}\left(\overline{AC}+\overline{AC_1}\right)$ sehingga

persamaan (3.30 menjadi

$$2s=\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\left(\overline{AC}+\overline{AC_1}\right)$$



Gambar 3

karena $\overline{AC}=b$, diperoleh

$$\overline{AC_1}=\frac{2\alpha}{\alpha+1}s-b\ . \qquad (3.29)$$

Selanjutnya, dengan mengganti $\overline{AC}=\overline{AB_1}+\overline{CB_1}$ maka persamaan (3.27) menjadi

$$2s=\left(\overline{BC}+\overline{CB_1}\right)+\left(\overline{AB}+\overline{AB_1}\right). \qquad (3.30)$$

Karena $\frac{\overline{BC}+\overline{CB_1}}{\overline{AB}+\overline{AB_1}}=\alpha$ maka $\overline{BC}+\overline{CB_1}=\alpha\left(\overline{AB}+\overline{AB_1}\right)$ sehingga persamaan (3.30) menjadi

$$2s=(\alpha+1)\left(\overline{AB}+\overline{AB_1}\right)$$

karena $\overline{AB}=c$, diperoleh

$$\overline{AB_1}=\frac{2}{\alpha+1}s-c. \tag{3.33}$$

Substitusi persamaan (3.31 dan (3.33 ke persamaan (3.6), sehingga diperoleh

$$L\Delta AC_1B_1=\frac{1}{bc}\left(\frac{2\alpha}{\alpha+1}s-b\right)\left(\frac{2}{\alpha+1}s-c\right)L\Delta ABC. \tag{3.34}$$

Dengan cara yang sama akan diperoleh

$$\overline{BC_1}=\frac{2}{\alpha+1}s-a. \qquad (3.35$$

$$\overline{BA_1}=\frac{2\alpha}{\alpha+1}s-c. \tag{3.36}$$

Substitusi persamaan (3.35 dan (3.36) ke persamaan (3.8), sehingga diperoleh

$$L\Delta BC_1A_1=\frac{1}{ca}\left(\frac{2\alpha}{\alpha+1}s-c\right)\left(\frac{2}{\alpha+1}s-a\right)L\Delta ABC \tag{3.37}$$

$$L\Delta B_1A_1C=\frac{1}{ab}\left(\frac{2\alpha}{\alpha+1}s-a\right)\left(\frac{2}{\alpha+1}s-b\right)L\Delta ABC. \tag{3.38}$$

Substitusi persamaan (3.34), (3.37), dan (3.38) ke persamaan (3.12) pada Teorema 3.3 sehingga diperoleh

$$L\Delta A_1B_1C_1=\left[1-\frac{1}{bc}\left(\frac{2\alpha}{\alpha+1}s-b\right)\left(\frac{2}{\alpha+1}s-c\right)-\frac{1}{ca}\left(\frac{2\alpha}{\alpha+1}s-c\right)\left(\frac{2}{\alpha+1}s-a\right)\right.$$
$$\left.-\frac{1}{ab}\left(\frac{2\alpha}{\alpha+1}s-a\right)\left(\frac{2}{\alpha+1}s-b\right)\right]L\Delta ABC$$

$$L\Delta A_1B_1C_1=\left[\frac{abc}{abc}-\frac{a}{abc}\left(\frac{2\alpha}{\alpha+1}s-b\right)\left(\frac{2}{\alpha+1}s-c\right)-\frac{b}{abc}\left(\frac{2\alpha}{\alpha+1}s-c\right)\left(\frac{2}{\alpha+1}s-a\right)\right.$$
$$\left.-\frac{c}{abc}\left(\frac{2\alpha}{\alpha+1}s-a\right)\left(\frac{2}{\alpha+1}s-b\right)\right]L\Delta ABC$$

$$L\Delta A_1B_1C_1 = \frac{1}{abc}\left[\left(\frac{2}{\alpha+1}s-a\right)\left(\frac{2}{\alpha+1}s-b\right)\left(\frac{2}{\alpha+1}s-c\right)+\right.$$

$$\left.\left(\frac{2\alpha}{\alpha+1}s-a\right)\left(\frac{2\alpha}{\alpha+1}s-b\right)\left(\frac{2\alpha}{\alpha+1}s-c\right)\right] L\Delta ABC. \quad (3.39)$$

Dipihak lain,

$$\left(\frac{2}{\alpha+1}s-a\right)\left(\frac{2}{\alpha+1}s-b\right)\left(\frac{2}{\alpha+1}s-c\right)+\left(\frac{2\alpha}{\alpha+1}s-a\right)\left(\frac{2\alpha}{\alpha+1}s-b\right)\left(\frac{2\alpha}{\alpha+1}s-c\right)$$

$$=2(s-a)(s-b)(s-c)+2\left(\frac{\alpha-1}{\alpha+1}\right)^2 s^3 \quad (3.40)$$

Pada [3] dijelaskan mengenai formula Heron yaitu

$$L\Delta ABC=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad (3.41)$$

bila persamaan (3.41) disubstitusikan ke persamaan (3.40), maka akan diperoleh

$$\left(\frac{2}{\alpha+1}s-a\right)\left(\frac{2}{\alpha+1}s-b\right)\left(\frac{2}{\alpha+1}s-c\right)+\left(\frac{2\alpha}{\alpha+1}s-a\right)\left(\frac{2\alpha}{\alpha+1}s-b\right)\left(\frac{2\alpha}{\alpha+1}s-c\right)$$

$$=\frac{2}{s}(L\Delta ABC)^2+2\left(\frac{\alpha-1}{\alpha+1}\right)^2 s^3. \quad (3.42)$$

Selanjutnya dengan mensubstitusikan persamaan (3.42) ke persamaan (3.39) akan diperoleh

$$L\Delta A_1B_1C_1=\frac{1}{abc}\left[\frac{2}{s}(L\Delta ABC)^2+2\left(\frac{\alpha-1}{\alpha+1}\right)^2 s^3\right]L\Delta ABC \quad (3.43)$$

bila ruas kiri dan kanan persamaan (3.43) dikalikan dengan $\frac{abc\,s}{2}$ maka diperoleh

$$\frac{abc\,s}{2}L\Delta A_1B_1C_1=(L\Delta ABC)^3+s^4\left(\frac{\alpha-1}{\alpha+1}\right)^2 L\Delta ABC. \quad (3.44)$$

Dari Lema 3.1 diperoleh

$$4\sqrt{3}\,L\Delta ABC\le\frac{9abc}{a+b+c}$$

bila ruas kiri dan kanannya dikali dengan $\frac{1}{9}s^2$ maka diperoleh

$$\frac{abc\,s}{2} \geq \frac{\sqrt{3}}{9}(a+b+c)^2 \, L\Delta ABC. \tag{3.45}$$

Subsitusi persamaan (3.3) pada Lema 3.1 sehingga persamaan (3.45) menjadi

$$\frac{abc\,s}{2} \geq \frac{\sqrt{3}}{9}\left[a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)\right] L\Delta ABC. \tag{3.46}$$

Kemudian, substitusikan persamaan (3.2) pada Lema 3.1 ke persamaan (3.46) sehingga diperoleh

$$\frac{abc\,s}{2} \geq \frac{\sqrt{3}}{9}\, 3(ab+bc+ca) L\Delta ABC. \tag{3.47}$$

Dari lema 3.2 diperoleh

$$ab+bc+ca \geq 4\sqrt{3}\, L\Delta ABC$$

bila ruas kiri dan kanannya dikalikan 3, maka diperoleh

$$3(ab+bc+ca) \geq 12\sqrt{3}\, L\Delta ABC \tag{3.48}$$

subsitusi persamaan (3.48) ke persamaan (3.47) sehingga diperoleh

$$\frac{abc\,s}{2} \geq \frac{\sqrt{3}}{9}\left(12\sqrt{3}\, L\Delta ABC\right) L\Delta ABC$$

atau dapat ditulis

$$4\,(L\Delta ABC)^2 \leq \frac{abc\,s}{2}. \tag{3.49}$$

Selanjutnya, kalikan ruas kiri dan kanan persamaan (3.49) dengan $L\Delta A_1B_1C_1$ sehingga diperoleh

$$4\,(L\Delta ABC)^2\, L\Delta A_1B_1C_1 \leq \frac{abc\,s}{2}\, L\Delta A_1B_1C_1. \tag{3.50}$$

Substitusi persamaan (3.44) ke persamaan (3.50) sehingga diperoleh

$$4\,(L\Delta ABC)^2\, L\Delta A_1B_1C_1 \leq (L\Delta ABC)^3 + s^4\left(\frac{\alpha-1}{\alpha+1}\right)^2 L\Delta ABC$$

kemudian kedua ruas dibagi dengan $(L\Delta ABC)^2$ sehingga terbukti bahwa

$$4\, L\Delta A_1B_1C_1 \leq L\Delta ABC + s^4\left(\frac{\alpha-1}{\alpha+2}\right)^2 (L\Delta ABC)^{-1}. \quad \blacksquare$$

Akibat 3.1 Misalkan ABC adalah sebuah segitiga, dan misalkan titik A_1, B_1 dan C_1 adalah titik-titik yang berada pada sisi $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, dan $\overline{AB}$ dengan syarat titik A_1, B_1, dan C_1 tersebut tidak bertepatan dengan titik A, B, dan C.

Jika

$$\left.\begin{aligned} \overline{AB}+\overline{BA_1} &= \overline{AC}+\overline{CA_1} \\ \overline{BC}+\overline{CB_1} &= \overline{AB}+\overline{AB_1} \\ \overline{AC}+\overline{AC_1} &= \overline{BC}+\overline{BC_1} \end{aligned}\right\} \tag{3.51}$$

maka

$$4\, L\Delta A_1B_1C_1 \leq L\Delta ABC$$

Bukti : Karena persamaan (3.51) berlaku maka

$$\frac{\overline{AB}+\overline{BA_1}}{\overline{AC}+\overline{CA_1}} = \frac{\overline{BC}+\overline{CB_1}}{\overline{AB}+\overline{BA_1}} = \frac{\overline{AC}+\overline{AC_1}}{\overline{BC}+\overline{BC_1}} = 1$$

berdasarkan Teorema 3.4 diperoleh $\alpha = 1$ sehingga

$$4\, L\Delta A_1B_1C_1 \leq L\Delta ABC\,. \qquad \blacksquare$$

***Teorema* 3.3.** Misalkan ABC adalah segitiga sebarang, dengan $a = |BC|$, $b = |CA|$, $c = |AB|$, dan luas Δ. Jika XYZ digambarkan di dalam ABC, maka

$$|XY| + |YZ| + |ZX| \geq \frac{8\Delta^2}{abc}. \tag{3.52}$$

Kesamaan dipenuhi pada (3.52) jika dan hanya jika ABC lancip, dan hanya jika XYZ adalah segitiga *orthic*-nya. Jika ABC siku-siku (tumpul), dan C adalah sudut siku-siku (tumpul), maka berlaku sebuah ketaksamaan yang lebih kuat dibanding (3.52), yakni,

$$|XY| + |YZ| + |ZX| > 2h_c\,, \tag{3.53}$$

dimana h_c adalah panjang garis tinggi dari C; dan pada kasus lain, taksiran ini merupakan kemungkinan yang terbaik.

Bukti :Misalkan XYZ adalah segitiga yang digambar di dalam ABC. Misalkan $x = |BX|$, $y = |CY|$, $z = |AZ|$. Maka $0 < x < a$, $0 < y < b$, $0 < z < c$. Dengan menggunakan Aturan Kosinus pada segitiga ZBX maka diperoleh

$$\begin{aligned}|ZX|^2 &= (c-z)^2 + x^2 - 2x(c-z)\cos B \\ &= (c-z)^2 + x^2 - 2x(c-z)\cos(A+C) \\ &= (x\cos A + (c-z)\cos C)^2 + (x\sin A - (c-z)\sin C)^2 .\end{aligned}$$

Sehingga,

$$|ZX| \ge |x\cos A + (c-z)\cos C| ,$$

dan akan sama jika dan hanya jika $x \sin A = (c-z)\sin C$, yakni jika hanya jika

$$ax + cz = c^2 , \tag{3.54}$$

dengan Aturan Sinus. Demikian pula $|XY| \ge |y\cos B + (a-x)\cos A|$,

akan sama jika dan hanya jika

$$ax + by = a^2 , \tag{3.55}$$

Selanjutnya $|YZ| \ge |z\cos C + (b-y)\cos B|$,

akan sama jika dan hanya jika

$$by + cz = b^2 , \tag{3.56}$$

Jadi, dengan ketaksamaan segitiga pada bilangan real,

$$\begin{aligned}&|XY| + |YZ| + |ZX| \\ &\ge |y\cos B + (a-x)\cos A| + |z\cos C + (b-y)\cos B| + |x\cos A + (c-z)\cos C| \\ &\ge |y\cos B + (a-x)\cos A + z\cos C + (b-y)\cos B + x\cos A + (c-z)\cos C| \\ &= |a\cos A + b\cos B + c\cos C| \\ &= \frac{\left|a^2\left(b^2+c^2-a^2\right) + b^2\left(c^2+a^2-b^2\right) + c^2\left(a^2+b^2-c^2\right)\right|}{2abc} \\ &= \frac{8\Delta^2}{abc} .\end{aligned}$$

Jadi (3.52) terbukti.

Selanjutnya, kesamaan dipenuhi jika dan hanya jika persamaan (3.54), (3.55), dan (3.56) terpenuhi, dan pernyataan berikut

$$\begin{aligned}u &= x\cos A + (c-z)\cos C , \\ v &= y\cos B + (a-x)\cos A , \\ w &= z\cos C + (b-y)\cos B ,\end{aligned}$$

bernilai seluruhnya non-negatif atau seluruhnya non-positif. Sehingga kini mudah untuk membuktikan bahwa sistem persamaan (3.54), (3.55), dan (3.56) memiliki solusi tunggal yang diberikan sebagai berikut

$$x = c\cos B\,,\ y = a\cos C\,,\ z = b\cos A\,,$$

yang mana pada kasus ini

$$u = b\cos B\,,\ v = c\cos C\,,\ w = a\cos A\,.$$

Jadi, pada kasus ini, sebanyak-banyaknya satu dari u, v, w bernilai non-positif. Namun, jika salah satu dari u, v, w adalah nol, maka salah satu dari x, y, z haruslah bernilai nol, yang mana merupakan hal yang tidak mungkin. Sehingga

$$|XY| + |YZ| + |ZX| > \frac{8\Delta^2}{abc},$$

kecuali jika ABC lancip, dan XYZ adalah segitiga *orthic*-nya. Jika ABC lancip, maka $\frac{8\Delta^2}{abc}$ adalah keliling dari segitiga *orthic*-nya, yang mana pada kasus ini kita kembali menggunakan teorema Fagnano, kesamaan tercapai di (3.52) jika dan hanya jika XYZ adalah segitiga *orthic*.

Berikutnya kembali pada kasus dimana ABC tidak lancip, pertama-tama anggap bahwa C adalah sudut siku-siku. Maka

$$|XY| + |YZ| + |ZX| > \frac{8\Delta^2}{abc} = \frac{4\Delta}{c} = 2h_c$$

sehingga (3.53) terpenuhi di dalam kasus ini. Selanjutnya, jika C adalah sudut tumpul, lambangkan D dan E masing-masing sebagai titik-titik perpotongan di sisi AB dan garis-garis yang melewati C yang tegak lurus terhadap masing-masing sisi-sisi BC dan CA. Maka Z adalah titik interior dari salah satu segmen garis $[B,D]$ dan $[E,A]$. Untuk kepastian, anggap bahwa Z adalah titik interior pada $[B,D]$. Jika Y' adalah titik perpotongan pada $[X,Y]$ dan $[C,D]$, maka

$$\begin{aligned}|XY| + |YZ| + |ZX| &= |XY'| + |Y'Y| + |YZ| + |ZX| \\ &> |XY'| + |Y'Z| + |ZX| \\ &> 2h_c\,,\end{aligned}$$

karena segitiga XYZ digambar di dalam segitiga siku-siku BCD. Argumen serupa juga berlaku jika Z adalah titik interior pada $[E, A]$. Sehingga, (3.53) juga terpenuhi jika C tumpul.

Maka (3.53) lebih kuat dibanding (3.52), untuk sebuah segitiga tidak lancip, dengan mengikuti pernyataan bahwa pada segitiga sebarang ABC,

$$\frac{4\Delta^2}{abc} = \frac{2\Delta \sin C}{c} = a \sin B \sin C \leq a \sin B = h_c .$$

Sekarang tinggal membuktikan bahwa ketaksamaan (3.53) tidak dapat dibuktikan bila sudut C nya siku-siku atau tumpul. Untuk menunjukkan hal ini, misalkan Z adalah kaki garis tegak lurus dari C ke AB, dan $0 < \varepsilon < 1$. Pilih Y pada CA sehingga $|CY| = \varepsilon b$, dan X pada BC sehingga XY sejajar dengan AB. Maka, ketika $\varepsilon \to 0^+$, X dan Y konvergen ke C, sehingga

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} (|XY| + |YZ| + |ZX|) = |CC| + |CZ| + |ZC| = 2|CZ| = 2h_c .$$

Kepustakaan

1. D. Grinberg and P. Yiu, 2002, 2002, The Apollonius Circles as a Tucker Circle, *Forum Geometricorum*, 2, 175 – 182.
2. Jian Liu, 2008,A Weighted Geometric Inequality and its Applications, *Journal of Inequality in pure and Applied Mathematics*, 9(2.11), 1 – 9.
3. Kisacanin, B. 2002. *Mathematical Problems and Proof Combinatorics, Number Theory, and Geometry*. Kluwer Academic Publishers, New York.
4. Kimberling, C, *Encyclopedia of Triangle Centers*, 2000, http://www2.evansville/edu.ck6/encyclopedia.
5. Lev Emeryanov, 2004, On the Intercepts of The OI-Line. *Forum Geometricorum*, 4, 81–84.
6. Lupu, C. 2007. Sharpness of Finsler-Hadwiger Inequality. 19 September 2007 : 11 hlm. http://www.mateforum.ro/articole/ineq. pdf, *25 February 2011*. pk. 10.15.
7. Mashadi, 2010, Bukti Sederhana Dari Teorema Carnot's dan Ketaksamaan Erdoss-Mordell. Proseding KNM XV, Manado, 41 – 55.
8. Rabinowitz, S. 1989. On The Computer Solution of Symmetric Homogeneous Triangle Inequalities. 25 hlm. http://ww.mathpropress.com/ stan/bibliography/inequalities.pdf,
9. Rainwater, J., P.H. Diananda & A. Bager. 1961. Problem 4908. *Amer. Math. Monthly.* **68** (3.54) : 386-387
10. Sandor, J. 2002. *Geometrics Theorems, Diophantine Equations, and Aritmatic functions*. 298 hlm. http://www.gallup.unm.edu/~smarandache/ jozsefsandor2.pdf,
11. Torrejon, R. M. 2005. On an Erdos Inscribed Triangle Inequality. *Forum Geom*. **5**, 137-141.
12. Wolfram Math Word. 2011. Inscribed Triangle. 1 hlm. http://mathword. wolfram.com/inscribedtriangle.html, 12 Februari 2011. pk. 13.15

13. Yiu, P. 2003. *Recretional Mathematics*. http://www.math.fau.edu/yiu/RecreationalMathematics2003.pdf,
14. Wong Yan Loi, 2009, *An Introductions to Geometry*, Academic press inc.
15. Yiu-P, Euclidean Geometry, 1998, available at http://www.mat.fau.edu/yiu/Geometry.hml.