BAB II

MATRIKS FUZZY, DETERMINAN DAN NILAI EIGENNYA

2.1. Matriks Fuzzy

Definisi 2.1.1. Suatu matriks $A=[a_{ij}]$ yang berukuran $n \times n$ dikatakan matriks fuzzy jika semua elemen-elemen dari matriks A berada dalam interval [0, 1].

Definisi 2.1.2. Untuk matriks fuzzy $A=[a_{ij}]$ berukuran $n \times n$, $B=[b_{ij}]$ berukuran $n \times n$, dan $C=[c_{ij}]$ berukuran $n \times n$, untuk $i,j=1,2,\dots,n$. Operasi-operasinya didefinisikan sebagai berikut:

$[A \vee B]_{ij} = a_{ij} \vee b_{ij} = maks\{a_{ij}, b_{ij}\}$.

$[A \otimes B]_{ij} = \bigvee_{k=1}^{l} (a_{ik} \wedge b_{kj})$, dengan $a_{ik} \wedge b_{kj} = \min\{a_{ik}, b_{kj}\}$

$A^{t} = [a_{ji}]$, (transpose dari A)

$A^{k} = [a_{ij}^{(k)}]$, $A^{k+1} = A^{k}A$, $k = 0,1,2,\dots,n$,

$A^{0} = I_n$, dengan I_n adalah matriks identitas,

$B \le C$ jika $b_{ij} \le c_{ij}$.

Berikut ini diberikan contoh operasi yang digunakan untuk 2 buah matriks fuzzy. Misalkan,

$$A = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 0.9 & 0.1 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.4 \\ 0.8 & 1 \end{bmatrix}$$

adalah 2 buah matriks fuzzy berukuran 2×2. Dengan menggunakan aljabar maks-min diperoleh:

$$A \vee B = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 0.9 & 0.1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.5 & 0.4 \\ 0.8 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.3 + 0.5 & 0.7 + 0.4 \\ 0.9 + 0.8 & 0.1 + 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \text{maks}(0.3,0.5) & \text{maks}(0.7,0.4) \\ \text{maks}(0.9,0.8) & \text{maks}(0.1,1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.5 & 0.7 \\ 0.9 & 1 \end{bmatrix}$$

dan

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 0.9 & 0.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 & 0.4 \\ 0.8 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \text{maks}\{\min\{0.3, 0.5\}, \min\{0.7, 0.8\}\} & \text{maks}\{\min\{0.3, 0.4\}, \min\{0.7, 1\}\} \\ \text{maks}\{\min\{0.9, 0.5\}, \min\{0.1, 0.8\}\} & \text{maks}\{\min\{0.9, 0.4\}, \min\{0.1, 1\}\} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \text{maks}\{0.3, 0,7\} & \text{maks}\{0.3, 0,7\} \\ \text{maks}\{0.5, 0,1\} & \text{maks}\{0.4, 0,1\} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.7 & 0.7 \\ 0.5 & 0.4 \end{bmatrix}$$

2.2. Determinan Matriks Fuzzy

Secara umum determinan dari suatu matriks fuzzy adalah sama dengan determinan pada matriks biasa. Bentuk umum definisi dan permutasi yang dipergunakan sama dengan determinan pada matriks biasa, yang membedakannya adalah pada determinan matriks fuzzy tidak menggunakan inversi untuk permutasi genap atau ganjil, dan bentuk operasi aljabar untuk semua elemen matriks menggunakan operasi aljabar maks-min. Definisi yang digunakan berdasarkan konsep permutasi.

Definisi 2.2.1: Determinan dari matriks fuzzy A di notasikan dengan $\det A$, yaitu $\det A = \bigvee_{\sigma \in S_n} (a_{1\sigma(1)} \wedge a_{2\sigma(2)} \wedge \ldots \wedge a_{n\sigma(n)})$, dengan S_n grup simetrik pada $\{1,2,\ldots,n\}$.

Berdasarkan operasi aljabar maks-min untuk semua matriks fuzzy, maka determinan dari suatu matriks fuzzy dapat ditulis dalam bentuk lain yaitu:

$$|A| = \underset{\sigma \in Sn}{\text{maks}}\{\min\{a_{1\sigma(1)}, a_{2\sigma(2)}, \ldots, a_{n\sigma(n)}\}\},$$

dengan S_n adalah grup simetrik pada $\{1,2,\ldots,n\}$.

Contoh 2.2.1. Untuk suatu matriks fuzzy $A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.8 \\ 0.6 & 0.2 & 0.9 \\ 0.0 & 0.7 & 0.4 \end{bmatrix}$,

Dengan menggunakan aljabar maks-min, maka determinan dari matriks A adalah

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32}$$

$$= \text{maks}\{\min\{a_{11}, a_{22}, a_{33}\}, \min\{a_{12}, a_{23}, a_{31}\}, \min\{a_{13}, a_{21}, a_{32}\}, \min\{a_{13}, a_{22}, a_{31}\}, \min\{a_{12}, a_{21}, a_{33}\}, \min\{a_{11}, a_{23}, a_{32}\}\}$$

$$= \text{maks}\{\min\{0.5, 0.2, 0.4\}, \min\{0.3, 0.9, 0.0\}, \min\{0.8, 0.6, 0.7\}, \min\{0.8, 0.2, 0.0\}, \min\{0.0.3, 0.6, 0.4\}, \min\{0.5, 0.9, 0.7\}\}$$

$$= \text{maks}\{0.2, 0.0, 0.6, 0.0, 0.3, 0.5\}$$

$$= 0.6$$

Proposisi 2.2.1. Misalkan $A = [a_{ij}]$ adalah suatu matriks fuzzy berukuran $n \times n$.

1. Jika suatu matriks fuzzy B diperoleh dari A dengan perkalian baris ke-i atau kolom ke-j dari A dengan $k \in [0,1]$, maka $k|A| = |B|$.
2. Jika A memuat baris atau kolom nol, maka $|A| = 0$.
3. Jika A adalah matriks segitiga, maka $|A| = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$, dengan $\prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 a_2 a_3 \cdots a_n$.

Bukti:

1. Misalkan skalar *k*, untuk $k \in [0,1]$ dikalikan pada baris ke-*p* dari matriks A, dinamakan matriks B,

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ ka_{p1} & ka_{p2} & \cdots & ka_{pn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Maka determinan matriks B adalah

$$\begin{aligned} |B| &= \sum_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots (k) a_{p\sigma(p)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\ &= \text{maks}\{\min\{a_{11}a_{22}\cdots(k)a_{pp}\cdots a_{nn}\}, \min\{a_{12}a_{23}\cdots(k)a_{p4}\cdots a_{n(n-1)}, \cdots, \\ &\qquad \min\{a_{12}a_{21}\cdots(k)a_{p4}\cdots a_{nn}\} \\ &= \text{maks}\{\min\{k,\{a_{11}a_{22}\cdots a_{pp}\cdots a_{nn}\}\}, \min\{k,\{a_{12}a_{23}\cdots a_{p4}\cdots a_{n(n-1)}\}\}, \cdots, \\ &\qquad \min\{k,\{a_{12}a_{21}\cdots a_{p4}\cdots a_{nn}\}\}\} \end{aligned}$$

Berdasarkan aljabar maks-min, jika $k \geq a_{ij}$ untuk $i,j = 1,2,\ldots,n$, maka yang berlaku adalah $\min\{a_{11}a_{22}\cdots a_{pp}\cdots a_{nn}\}, \min\{a_{12}a_{23}\cdots a_{p4}\cdots a_{n(n-1)}\}, \ldots,$ $\min\{a_{12}a_{21}\cdots a_{p4}\cdots a_{nn}\}$. Jika $k \leq a_{ij}$ untuk $i,j = 1,2,\ldots,n$, maka yang berlaku adalah k.

Dengan demikian

$$\begin{aligned} |B| &= k \;\; \text{maks}\{\min\{a_{11}a_{22}\cdots a_{pp}\cdots a_{nn}\}, \min\{a_{12}a_{23}\cdots a_{p4}\cdots a_{n(n-1)}\}, \ldots, \\ &\qquad \min\{a_{12}a_{21}\cdots a_{p4}\cdots a_{nn}\}\} \end{aligned}$$

$$|B| = k|A|. \qquad \blacksquare$$

2. Misalkan A adalah matriks fuzzy berukuran $n \times n$ yang memuat baris nol,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Sebagai akibat dari Proposisi 2.2.1.1, jika $k = 0$, ini berarti Matriks A mempunyai sebaris bilangan nol. Dengan demi kian determinan A adalah nol.

3. Misalkan A adalah matriks fuzzy segitiga bawah,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Maka determinan A adalah

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}.$$

Karena A adalah matriks fuzzy segitiga bawah, untuk $i < j$ maka $a_{ij} = 0$. Sehingga setiap hasil kali elementer yang memuat elemen a_{ij} dengan $(i < j)$ adalah nol.

$$\begin{aligned} |A| &= \text{maks}\{\min\{(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}), 0, 0, \ldots, 0\}\} \\ &= \min\{a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}\}. \end{aligned}$$ ■

Proposisi 2.2.2. Jika A adalah suatu matriks fuzzy berukuran $n \times n$ maka $|A| = |A^t|$.

Bukti:

Misalkan $A = [a_{ij}]$ berukuran $n \times n$, $A^t = [a_{ji}] = B = [b_{ij}]$ berukuran $n \times n$.

Determinan matriks B adalah

$$\begin{aligned}|B| &= \sum_{\sigma\in S_n} b_{1\sigma(1)}b_{2\sigma(2)}\cdots b_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma\in S_n} a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}\cdots a_{\sigma(n)n}.\end{aligned}$$

Misalkan ϕ adalah permutasi dari $\{1,2,\ldots,n\}$ sedemikian hingga $\phi\sigma = I$ yang merupakan permutasi identitas, maka $\phi = \sigma^{-1}$.

Misalkan $\sigma(i) = j$, maka $i = \sigma^{-1}(j)$, dan $a_{\sigma(i)i} = a_{j\phi(j)}$, untuk semua i dan j.

Oleh karena itu,

$$\begin{aligned}|B| &= \sum_{\sigma\in S_n} a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}\cdots a_{\sigma(n)n} \\ &= \sum_{\sigma\in S_n} a_{1\phi(1)}a_{2\phi(2)}\cdots a_{n\phi(n)} \\ &= |A|.\end{aligned}$$

Dengan demikian

$$|A| = |A^t|. \qquad \blacksquare$$

2.3. NILAI EIGEN

Perhatikan suatu matriks fuzzy $A = [a_{ij}]$, atau dinotasikan sebagai $[A]_{ij}$ atau A_{ij}. Untuk sebarang matriks fuzzy A dan B dengan ukuran yang sama ,

$$[A \vee B]_{ij} = a_{ij} \vee b_{ij} = maks\{a_{ij}, b_{ij}\}.$$

Misal F merupakan interval satuan, yaitu $F = [0, 1]$, maka $F^{m\times n}$ merupakan himpunan dari semua matriks fuzzy berukuran $(m \times n)$. Jika $A \in F^{mxl}$ dan $B \in F^{lxn}$, maka

$$[A \otimes B]_{ij} = \bigvee_{k=1}^{l}(a_{ik} \wedge b_{kj}),$$

dengan $a_{ik} \wedge b_{kj} = \min\{a_{ik}, b_{kj}\}$ dan $A \otimes B$ berukuran $m \times n$.

Definisi 2.3.1 : Untuk sebarang matriks fuzzy A dan B dengan ukuran yang sama , $A \leq B$ jika dan hanya jika $a_{ij} \leq b_{ij}$ untuk setiap i dan j.

Definisi 2.3.2 : Untuk suatu skalar $\lambda \in F$, $\lambda \otimes A = [\lambda \wedge a_{ij}]$.

Definisi 2.3.3 : Untuk himpunan indeks $\alpha \subseteq \{1,2,...,n\}$, dinotasikan $A[\alpha]$ sebagai submatriks fuzzy yang termuat dalam baris dan kolom dari A yang indeksnya α .

Definisi 2.3.4 : Determinan dari $A[\alpha]$ disebut principal minor dari A.

Definisi 2.3.5 : Suatu matriks fuzzy A yang berukuran $(n \times n)$ disebut reducible jika terdapat sebuah matriks permutasi P sedemikian hingga

$P \otimes A \otimes P^T = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$, dengan A_{11} dan A_{22} adalah submatriks fuzzy kuadrat.

Definisi 2.3.6 : Matriks fuzzy A yang berukuran $(n \times n)$ disebut irreducible jika A tidak *reducible*.

Definisi 2.3.7 : Misalkan $x \in F^n$, maka $x > O$ jika $x_i > 0$ untuk setiap $i = 1,2,...,n$ dengan O adalah matriks fuzzy nol atau vektor nol.

Definisi 2.3.8 : Untuk sebarang $A = [a_{ij}] \in F^{n \times n}$, didefinisikan $\Delta A = [\Delta a_{ij}]$ dengan

$$\Delta a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{jika } a_{ij} \leq a_{ji} \\ a_{ij}, & \text{untuk lainnya} \end{cases}$$

Definisi 2.3.9 : Misalkan $\Im = \{A^{(1)}, A^{(2)}, ..., A^{(m)}\} \subset F^{n \times n}$. Untuk $k \in N$, maka $\Im^k$ adalah himpunan dari semua product matriks di $\Im$ dengan panjang k, yaitu :

$$\Im = \{A_1 \otimes A_2 \otimes ... \otimes A_{k-1} \otimes A_k : A_i \in \Im \quad \text{untuk } i = 1,2,...,k\}$$

Definisi 2.3.10 : Misal A matriks fuzzy berukuran $(n \times n)$. Suatu skalar $\lambda \in [0, 1]$ disebut nilai eigen dari A bila $A \otimes x = \lambda \otimes x$ untuk suatu vektor tak nol $x = [x_j]$ dengan $x_j \in [0, 1]$, dengan kata lain $\bigvee_{j=1}^{n}(a_{ij} \wedge x_j) = \lambda \wedge x_i$, $\forall i = 1,2,\ldots,n.$