



Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

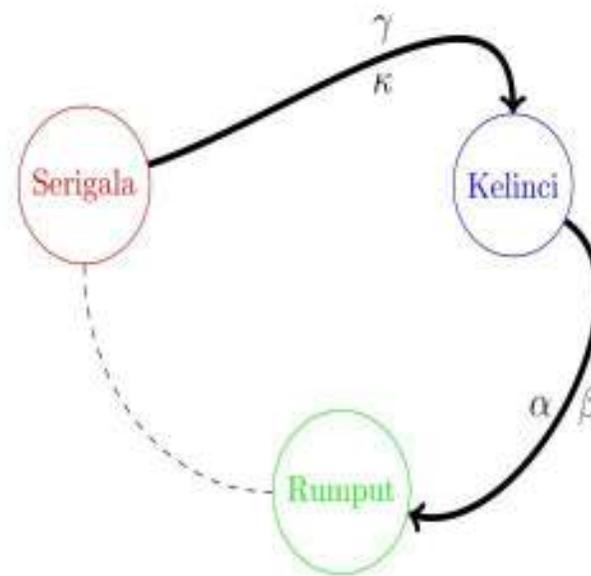
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:

- Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
- Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.

2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.

# CATATAN KULIAH

## PEMODELAN MATEMATIKA



**Khozin Mu'tamar**

Computational mathematics research group

Departement of mathematics

Faculty of Mathematics and Natural Sciences, Universitas Riau.

*Kampus Bina Widya UNRI, Simpangbaru, Pekanbaru*

*Riau, Kodepos 28293*

Office : Ruang Epsilon-02

Email : khozin.mutamar(@unri.ac.id), (@lecturer.unri.ac.id), (@gmail.com).

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.



## DAFTAR ISI

<b>Daftar Isi</b>	<b>1</b>
<b>Daftar Gambar</b>	<b>3</b>
<b>Modeling dengan Data</b>	<b>5</b>
1.1 Linear Least Square . . . . .	5
1.1.1 Bekerja dengan Teknologi . . . . .	6
1.2 Polynomial Least Square . . . . .	9
1.2.1 Bekerja dengan Teknologi . . . . .	10
1.3 Nonlinear Least Square . . . . .	14
1.3.1 Transformasi Bentuk Linear . . . . .	14
1.3.2 Bekerja dengan Teknologi . . . . .	15
1.4 Latihan . . . . .	20
<b>Model Pertumbuhan Dasar</b>	<b>22</b>
2.1 Model Eksponensial . . . . .	22
2.1.1 Modelling . . . . .	22
2.1.2 Solusi Model . . . . .	23
2.1.3 Perilaku Kurva . . . . .	24
2.1.4 Model Eksponensial dan Data . . . . .	24
2.2 Model Logistik . . . . .	25
2.2.1 Analisa Keseimbangan . . . . .	25
2.2.2 Solusi Model . . . . .	26
2.2.3 Maksimum Populasi . . . . .	27
2.2.4 Perilaku Laju Pertumbuhan . . . . .	27
2.2.5 Model Logistik dengan Data . . . . .	29
<b>Model Pertumbuhan Dua Populasi</b>	<b>31</b>
3.1 Model Linier . . . . .	31
3.1.1 Titik Ekuilibrium . . . . .	33
3.1.2 Solusi Model . . . . .	33
3.1.2.1 Substitusi langsung . . . . .	34
3.1.2.2 Nilai Eigen Real Berbeda . . . . .	35
3.1.2.3 Nilai Eigen yang Berulang . . . . .	36
3.1.2.4 Nilai Eigen Kompleks . . . . .	38

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang memperbanyak dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.

3.1.3	Kestabilan Model Linear	40
3.2	Model Nonlinear	45
3.2.1	Titik Ekuilibrium	46
3.2.2	Linierisasi	48
3.2.3	Kestabilan Lokal	49
	<b>Model Predator-Prey</b>	<b>52</b>
4.1	Titik Ekuilibrium	53
4.2	Kestabilan Model	54
4.3	Analisa Bidang Fase	56
	<b>Model Gerak Pendulum</b>	<b>59</b>
5.1	Persamaan Gerak	59
5.2	Bentuk Sistem	61
5.3	Titik Ekuilibrium	61
5.4	Kestabilan Model	62
5.5	Frekuensi dan Periode Gerakan	64
5.6	Simulasi	65
5.6.1	Kasus 1. $x(0) = 0, v(0) = v_0$	65
5.6.2	Kasus 2. $x(0) = x_0, v(0) = 0$	65
5.6.3	Kasus 3. $x(0) = x_0, v(0) = v_0$	65
	<b>Model Gerak Pegas</b>	<b>66</b>
6.1	Modelling	66
6.2	Solusi Eksak	67
6.3	Frekuensi dan Periode	68
6.4	Titik Ekuilibrium	69
6.5	Simpangan Terjauh	69
6.6	Pegas Teredam	70
6.7	Pegas Gabungan Paralel	71
6.8	Pegas Gabungan Seri	73
	<b>Model Epidemi SIR</b>	<b>75</b>
7.1	Modeling	75
7.2	Bilangan $R_0$	78
7.3	Titik Ekuilibrium	78
7.4	Local Analysis	78



Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.



DAFTAR GAMBAR

1	Proses perhitungan parameter dengan Ms. Excel . . . . .	8
2	Kurva bersama antara data dan fungsi aproksimasi berupa fungsi linear . . . . .	8
3	Selisih kuadrat antara data dan hampiran tiap $t$ . . . . .	9
4	Proses perhitungan parameter polynomial $P_3(x)$ dengan Ms. Excel . . . . .	12
5	Kurva bersama antara data dan fungsi aproksimasi berupa fungsi polynomial orde 3 . . . . .	13
6	Selisih kuadrat antara data dan hampiran tiap $t$ . . . . .	13
7	Proses perhitungan parameter eksponensial $f(t) = Ae^{Bt}$ dengan Ms. Excel . . . . .	16
8	Kurva bersama antara data dan fungsi aproksimasi berupa fungsi eksponensial $f(t) = Ae^{Bt}$ . . . . .	17
9	Selisih kuadrat antara data dan hampiran tiap $t$ . . . . .	17
10	Kurva bersama antara data dan fungsi aproksimasi berupa fungsi eksponensial $f(t) = Ae^{Bt}$ menggunakan Matlab . . . . .	18
11	Selisih kuadrat antara data dan hampiran tiap $t$ yang menggunakan Matlab . . . . .	19
12	Skema hubungan Rusa dan Serigala dengan mengabaikan efek interaksi antara kedua individu . . . . .	32
13	Bidang fase untuk nilai eigen $\lambda_{1,2}$ bernilai positif . . . . .	42
14	Bidang fase untuk nilai eigen $\lambda_{1,2}$ bernilai negatif . . . . .	42
15	Bidang fase untuk nilai eigen $\lambda_{1,2}$ bertanda berbeda . . . . .	42
16	Bidang fase untuk nilai eigen $\lambda_1 = \lambda_2$ dan bertanda positif . . . . .	43
17	Bidang fase untuk nilai eigen $\lambda_1 = \lambda_2$ dan bertanda negatif . . . . .	43
18	Bidang fase untuk nilai eigen $\lambda_{1,2} = \alpha + i\beta$ dan $\text{Re}(\lambda) > 0$ . . . . .	44
19	Bidang fase untuk nilai eigen $\lambda_{1,2} = \alpha + i\beta$ dan $\text{Re}(\lambda) < 0$ . . . . .	44
20	Bidang fase untuk nilai eigen $\lambda_{1,2} = \alpha + i\beta$ dan $\text{Re}(\lambda) = 0$ . . . . .	45
21	Skema Hubungan antara kelinci dan Serigala . . . . .	52
22	Bidang Fase Titik Ekuilibrium Pertama . . . . .	55
23	Bidang Fase Sistem Nonlinear di Sekitar Titik Ekuilibrium . . . . .	56
24	Plot persamaan (3) secara implisit . . . . .	57
25	Plot fungsi $f(K)$ dengan garis biru adalah garis titik maksimum $K = \frac{a}{\alpha}$ . . . . .	58
26	Plot fungsi $g(S)$ dengan garis biru adalah garis titik maksimum $S = \frac{b}{\beta}$ . . . . .	58
27	Pola Gerakan Pendulum . . . . .	59



## Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:

- a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
- b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.

2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.

28	Komponen vektor pada posisi $B$ . . . . .	59
29	Bidang fase di sekitar beberapa titik ekuilibrium . . . . .	62
30	Bidang fase sistem linearisasi di sekitar titik ekuilibrium pertama . . . . .	63
31	Bidang fase sistem linearisasi di sekitar titik ekuilibrium kedua dengan nilai $k$ genap . . . . .	63
32	Bidang fase sistem linearisasi di sekitar titik ekuilibrium kedua dengan nilai $k$ ganjil . . . . .	64
33	Sistem pegas mendatar . . . . .	66
34	Sistem pegas mendatar dengan peredam kecepatan . . . . .	70
35	Pegas mendatar susunan paralel . . . . .	71
36	Pegas gabungan ketika merentang . . . . .	72
37	Pegas mendatar susunan seri . . . . .	73
38	Pegas gabungan ketika merentang . . . . .	73
39	Skema hubungan antar kompartmen pada model SIR . . . . .	75

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.



# BAB 1

## MODELING DENGAN DATA

### Tujuan:

1. Mempelajari metode eksak dan numerik dalam mengolah data untuk mendapatkan pendekatan kurva terhadap data yang diberikan
2. Melakukan transformasi fungsi eksponensial agar dapat dilakukan kurva fitting secara linear
3. Mendapatkan nilai parameter dari data untuk fungsi yang diinginkan
4. Mendapatkan intepretasi untuk massa yang akan datang dari pengolahan data yang telah ada

Misalkan diberikan sejumlah  $n$  data yaitu  $(t_i, d_i), i = 1, 2, 3, \dots, n$ . Misalkan diberikan fungsi pendekatan untuk tebakan bagi data tersebut, yaitu  $f(t)$ . Jumlah selisih kuadrat antara data dan fungsi tebakan dapat dituliskan dalam bentuk

$$r(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (d(t_i) - f(t_i))^2$$

Tujuan yang ingin dicapai adalah menentukan  $f(t)$  sehingga dapat meminimalkan nilai dari  $r(t)$ .

## 1.1 Linear Least Square

Misalkan ditentukan fungsi  $f(t)$  linear yaitu

$$f(t) = at + b, a, b \in \mathbb{R}$$

Fungsi tujuan menjadi

$$r(t, a, b) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (at_i + b - d_i)^2$$

dengan  $d_i = d(t_i)$ . Selanjutnya, akan ditentukan nilai  $a, b$  agar fungsi tujuan  $r(t, a, b)$  bernilai minimum.  $r(t, a, b)$  akan bernilai minimum di titik kritis  $(a^*, b^*)$ . Oleh karena itu,

$$\frac{\partial r}{\partial a} = \sum_{i=1}^n (at_i + b - d_i)t_i = 0$$

dan

$$\frac{\partial r}{\partial b} = \sum_{i=1}^n a^*t_i + b^* - d_i = 0$$

selanjutnya, dengan menyederhanakan, akan diperoleh

$$\sum_{i=1}^n a^*t_i + b^* = \sum_{i=1}^n d_i$$

$$\sum_{i=1}^n a^*t_i^2 + b^*t_i = \sum_{i=1}^n d_it_i$$

parameter yang akan ditentukan nilainya adalah  $(a^*, b^*)$  dan keduanya lepas dari notasi sigma. Selanjutnya, persamaan dapat dituliskan dalam bentuk sistem persamaan linear  $A\vec{x} = \vec{b}$  dengan

$$A = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n t_i & \sum_{i=1}^n 1 \\ \sum_{i=1}^n t_i^2 & \sum_{i=1}^n t_i \end{pmatrix}, \vec{x} = \begin{pmatrix} a^* \\ b^* \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n d_i \\ \sum_{i=1}^n d_it_i \end{pmatrix}$$

Jika determinan dari  $A$  tidak nol, solusi akhir dapat ditentukan dengan aturan SPL,

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$$

### 1.1.1 Bekerja dengan Teknologi

misalkan diberikan data

No	$t$	$d$
1	0	1.47
2	1	4.82
3	2	8.17
4	3	11.74
5	4	14.26
6	5	18.05
7	6	21.00
8	7	24.16
9	8	28.00
10	9	31.17
11	10	34.66
12	11	37.74
13	12	40.36
14	13	44.03
15	14	47.09
16	15	50.75

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:

- a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.



17	16	53.87
18	17	57.19
19	18	59.98
20	19	63.83

Akan ditentukan parameter  $a, b \in \mathbb{R}$  sehingga diperoleh fungsi linear yang menghamiri fungsi tersebut.

1. Tuliskan data tersebut pada MS. Excel sehingga diperoleh data yang tersimpan pada 21 baris dan 3 kolom. Misalkan no pada kolom  $a$ ,  $t$  pada kolom  $b$ ,  $h$  pada kolom  $c$ .
2. Siapkan empat cell dalam MS. Excel untuk menyimpan entri dari matriks  $A$ , misalkan dimulai dari  $F2 : G3$  dan dua cell untuk vektor  $\vec{b}$ , misalkan  $J2 : J3$ .

3. Entri  $a_{11}, a_{22}$  dihitung dengan rumus

1 =sum (b2 :b21)

4. Entri  $a_{12}$  dihitung dengan rumus

1 =counta (b2 :b21)

5. Entri  $a_{21}$  dihitung dengan rumus

1 =sumsq (b2 :b21)

6. Entri  $b_1$  dihitung dengan rumus

1 =sum (c2 :c21)

7. Entri  $b_1$  dihitung dengan rumus

1 =sumproduct (b2 :b21, c2 :c21)

8. Siapkan dua cell dalam bentuk vektor  $2 \times 1$  untuk menyimpan nilai parameter  $a, b$ , misalkan di  $G5, G6$ .

9. Blok  $G5 : G6$  lalu ketikkan perintah perkalian matriks

1 =MMULT (MINVERSE (F2 :G3) , J2 : J3)

10. Tahan kombinasi **CTRL+SHIFT** lalu tekan **ENTER**. Hasil akan ditampilkan pada cell  $G5 : G6$ . Parameter yang diperoleh adalah

$$a = 3.26563$$

$$b = 1.59319$$

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.



Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengemukakan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.

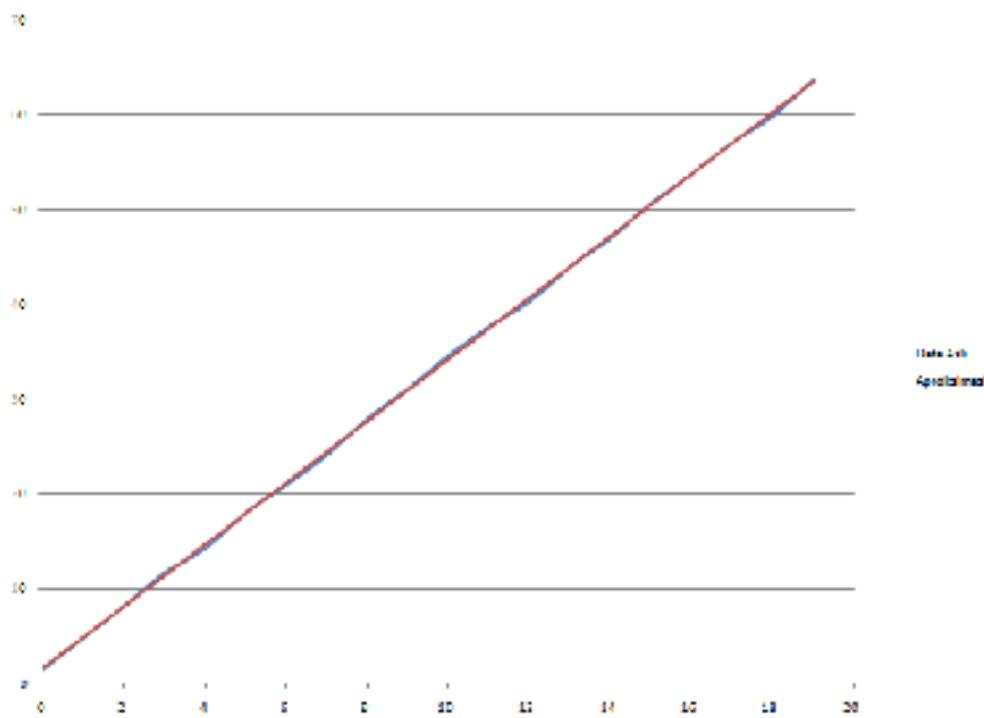
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	No	t	h		A	1	7		B	
2	1	0	1.468485		1	190	20		1	652.3337
3	2	1	4.815711		2	2470	100		2	8768.814
4	3	2	8.173936					a	3.26563	
5	4	3	11.53216					b	1.593198	
6	5	4	14.89038							
7	6	5	18.2486							
8	7	6	21.60683							
9	8	7	24.96505							
10	9	8	28.32328							
11	10	9	31.6815							
12	11	10	35.03973							
13	12	11	38.39795							
14	13	12	41.75618							
15	14	13	45.1144							
16	15	14	48.47263							
17	16	15	51.83085							
18	17	16	55.18908							
19	18	17	58.5473							
20	19	18	61.90553							
21	20	19	65.26375							

Cambar 1: Proses perhitungan parameter dengan Ms. Excel

Menggunakan nilai parameter yang diperoleh,  $a = 3.26563$ ,  $b = 1.59319$  akan diperoleh eror 0.611 sehingga menghasilkan eror relatif

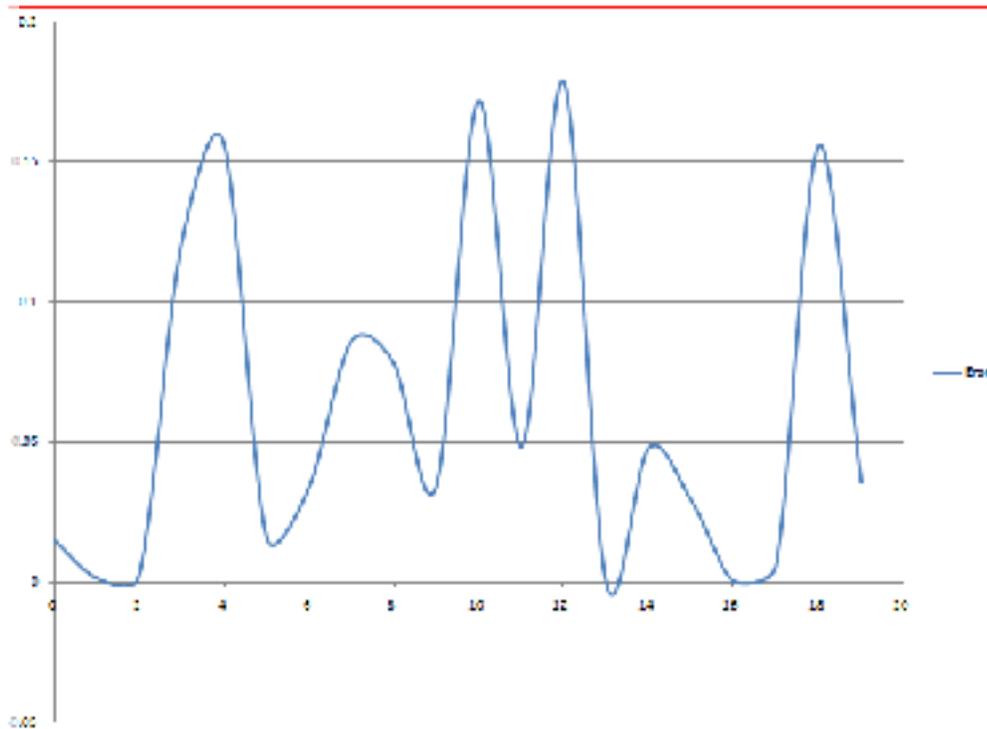
$$Rel(a, b) = \frac{0.611}{652.334} = 0.09\%$$

Hasil penggambaran antara data dan fungsi aproksimasi linear ditunjukkan pada gambar



Cambar 2: Kurva bersama antara data dan fungsi aproksimasi berupa fungsi linear





Cambar 3: Selisih kuadrat antara data dan hampiran tiap  $t$

## 1.2 Polynomial Least Square

Dipilih fungsi  $f(t)$  adalah polinomial berderajat  $m$  sehingga

$$f(t) = P_m(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_mt^m$$

dengan  $a_m \neq 0$ . Fungsi tujuan  $r(t)$  menjadi

$$r(t, a_0, a_1, \dots, a_m) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (f(t_j) - d_j)^2$$

selanjutnya, akan ditentukan nilai  $a_j, j = 0, 1, 2, \dots, m$  agar fungsi tujuan bernilai minimum. Nilai minimum  $r(t, a_0, a_1, \dots, a_m)$  tercapai di titik kritis yaitu ketika turunan pertama  $r(t, a_0, a_1, \dots, a_m)$  terhadap masing-masing parameter  $a_j$  bernilai nol secara simultan. Oleh karena itu,

$$\frac{\partial r(t)}{\partial a_j} = \sum_{j=1}^n (f(t_j) - d_j)t_j^j = 0, j = 0, 1, 2, \dots, m$$

penyederhanaan akan menghasilkan

$$\sum_{j=1}^n f(t_j)t_j^j = \sum_{j=1}^n d_j t_j^j$$

$$\sum_{j=1}^n (a_0 + a_1t_j + \dots + a_mt_j^m) t_j^j = \sum_{j=1}^n d_j t_j^j$$

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengemukakan data yang menyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.



dimana  $j = 0, 1, 2, \dots, m$ .

Untuk  $j = 0, 1, 2, m$  akan diperoleh

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (a_0 + a_1 t_i + \dots + a_m t_i^m) &= \sum_{i=1}^n d_i \\ \sum_{i=1}^n (a_0 + a_1 t_i + \dots + a_m t_i^m) t_i &= \sum_{i=1}^n d_i t_i \\ \sum_{i=1}^n (a_0 + a_1 t_i + \dots + a_m t_i^m) t_i^2 &= \sum_{i=1}^n d_i t_i^2 \\ \sum_{i=1}^n (a_0 + a_1 t_i + \dots + a_m t_i^m) t_i^m &= \sum_{i=1}^n d_i t_i^m \end{aligned}$$

Jika dituliskan dalam notasi matriks sistem persamaan linear  $A\vec{x} = \vec{b}$  dengan

$$A = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n 1 & \sum_{i=1}^n t_i & \sum_{i=1}^n t_i^2 & \dots & \sum_{i=1}^n t_i^m \\ \sum_{i=1}^n t_i & \sum_{i=1}^n t_i^2 & \sum_{i=1}^n t_i^3 & \dots & \sum_{i=1}^n t_i^{m+1} \\ \sum_{i=1}^n t_i^2 & \sum_{i=1}^n t_i^3 & \sum_{i=1}^n t_i^4 & \dots & \sum_{i=1}^n t_i^{m+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^n t_i^m & \sum_{i=1}^n t_i^{m+1} & \sum_{i=1}^n t_i^{m+2} & \dots & \sum_{i=1}^n t_i^{2m} \end{pmatrix}$$

dengan

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n d_i \\ \sum_{i=1}^n d_i t_i \\ \sum_{i=1}^n d_i t_i^2 \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n d_i t_i^m \end{pmatrix}$$

## 2.1 Bekerja dengan Teknologi

misalkan diberikan data

No	$t$	$d$
1	0	3.41
2	1	6.65
3	2	21.66
4	3	63.99
5	4	149.30
6	5	292.01
7	6	506.78
8	7	809.51
9	8	1213.92
10	9	1735.67
11	10	2390.57
12	11	3192.62

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

- Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
  - Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
- Dilarang mengemukakan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.



13	12	4156.92
14	13	5298.59
15	14	6632.44
16	15	8174.49
17	16	9938.08
18	17	11938.83
19	18	14193.01
20	19	16713.80

Akan ditentukan parameter  $a_3, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$  yang membuat fungsi polinom  $P_3(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$  menjadi hampiran bagi data dan memiliki eror minimum.

Langkah kerjanya diberikan pada tahapan berikut ini

1. Tuliskan data tersebut pada Ms. Excel. Misalkan dituliskan pada  $A1 : C21$ , yang berarti terdapat 21 baris dan tiga kolom. Misalkan kolom  $A$  adalah data no, kolom  $B$  data  $t$  dan kolom  $C$  adalah data  $y$ .

2. Siapkan cell dengan ukuran  $4 \times 4$  untuk menyimpan entri matriks  $A$ . Misalkan cell yang disiapkan pada  $F2 : I5$ .

3. Hitung entri  $A_{11}$ .  $A_{11}$  dihitung dengan rumus

`=COUNTA (B2 : B21)`

4. Hitung entri  $A_{21}, A_{12}$  karena kedua entri ini bernilai sama. Rumus yang digunakan adalah

`=SUM (B2 : B21)`

5. Hitung entri  $A_{31}, A_{22}, A_{13}$  karena kedua entri ini bernilai sama. Rumus yang digunakan adalah

`=SUMSQ (B2 : B21)`

6. Hitung entri  $A_{42}, A_{33}, A_{24}$  karena kedua entri ini bernilai sama. Rumus yang digunakan adalah

`=SUMPRODUCT (B2 : B21, B2 : B21, B2 : B21, B2 : B21)`

7. Hitung entri  $A_{43}, A_{34}$  karena kedua entri ini bernilai sama. Rumus yang digunakan adalah

`=SUMPRODUCT (B2 : B21, B2 : B21, B2 : B21, B2 : B21, B2 : B21)`

8. Hitung entri  $A_{33}$  dengan persamaan

`=SUMPRODUCT (B2 : B21, B2 : B21)`

9. Hitung entri vektor  $b_1$  dengan rumus

`=SUM (C2 : C21)`

10. Hitung entri vektor  $b_2$  dengan rumus

`=SUMPRODUCT (C2 : C21, B2 : B21)`

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.



Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang  
 1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:  
 a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.  
 b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.  
 2. Dilarang mengemukakan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.

11. Hitung entri vektor  $b_3$  dengan rumus  
`=SUMPRODUCT (C2 : C21, B2 : B21, B2 : B21)`
12. Hitung entri vektor  $b_4$  dengan rumus  
`=SUMPRODUCT (C2 : C21, B2 : B21, B2 : B21, B2 : B21)`
13. Buat cell ukuran  $4 \times 1$  untuk menyimpan nilai parameter hasil solusi SPL. Misalkan kolom ini dibuat pada  $H7 : H10$
14. Blok cell  $H7 : H10$ , lalu ketikkan rumus  
`=MMULT (MINVERSE (F2 : IS), L2 : LS)`
15. Tekan dan tahan tombol CTRL + SHIFT lalu tekan ENTER. Hasil akhir akan tampak pada cell  $H7 : H10$ , yaitu

$$a_0 = 3.54$$

$$a_1 = 1.61$$

$$a_2 = 1.28$$

$$a_3 = 2.50$$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	M <sub>0</sub>	P	Q		A	B	C	D	E	F		
2	1	0	3.41		1	20	100	2470	30100		1	87132.94
3	2	1	6.56		2	30	270	1600	36000		2	216765.7
4	3	2	21.91		3	40	360	3200	50400		3	433287.6
5	4	3	73.94		4	50	500	6100	152500		4	1703287.7
6	5	4	145.76									
7	6	5	252.31				a <sub>0</sub>	3.54				
8	7	6	398.78				a <sub>1</sub>	1.61				
9	8	7	585.23				a <sub>2</sub>	1.28				
10	9	8	813.67				a <sub>3</sub>	2.50				
11	10	9	1093.02									
12	11	10	1433.29									
13	12	11	1835.52									
14	13	12	2300.72									
15	14	13	2829.99									
16	15	14	3423.24									
17	16	15	4080.48									
18	17	16	4801.72									
19	18	17	5588.07									
20	19	18	6440.54									
21	20	19	7359.14									

Gambar 4: Proses perhitungan parameter polynomial  $P_3(x)$  dengan Ms. Excel

Menggunakan nilai parameter yang diperoleh,  $a_0 = 3.54, a_1 = 1.61, a_2 = 1.28, a_3 = 2.50$  akan diperoleh eror 0.4278 sehingga menghasilkan eror relatif

$$Rel(a, b) = \frac{0.4278}{87432.26} = 0.001\%$$

Hasil penggambaran antara data dan fungsi aproksimasi linear ditunjukkan pada gambar

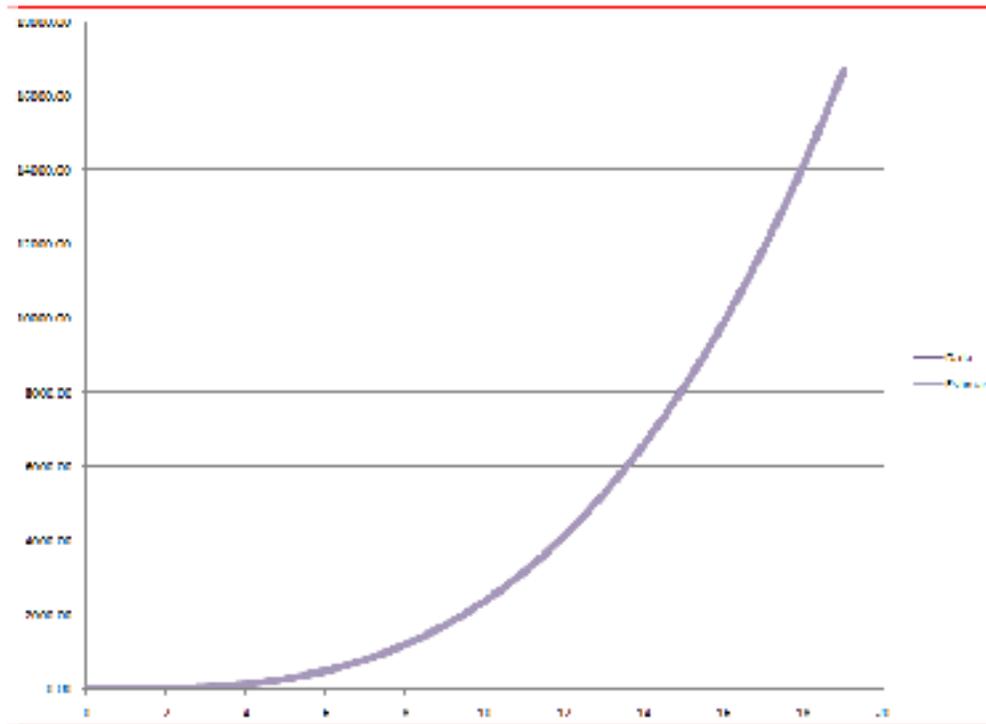


Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

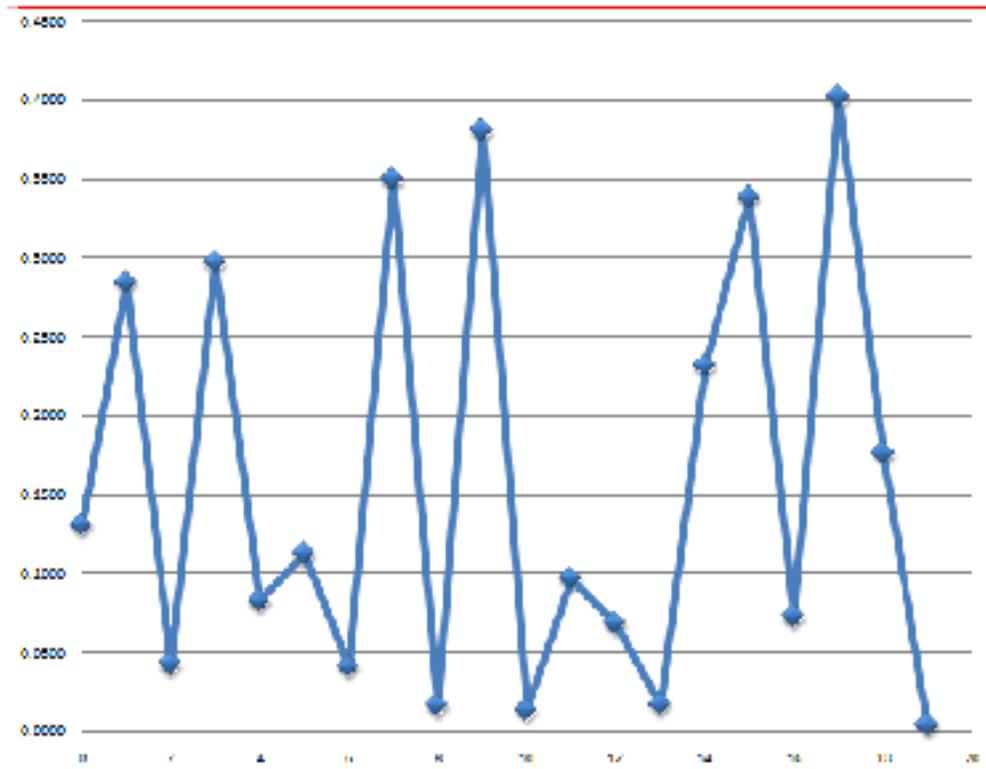
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:

- a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
- b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.

2. Dilarang mengemukakan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.



Cambar 5: Kurva bersama antara data dan fungsi aproksimasi berupa fungsi polinomial orde 3



Cambar 6: Selisih kuadrat antara data dan hampiran tiap  $i$



# 1.3 Nonlinear Least Square

Misalkan dipilih  $f(t) = Ae^{Bt}$  dengan  $A, B$  adalah konstanta yang akan ditentukan nilainya. Fungsi tujuan selanjutnya dapat dituliskan dalam bentuk

$$r(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (Ae^{Bt_i} - d_i)^2$$

Untuk menentukan  $A, B$  yang meminimumkan  $r(t)$  maka

$$\frac{\partial r}{\partial A} = \sum_{i=1}^n (Ae^{Bt_i} - d_i)e^{Bt_i}$$

$$\frac{\partial r}{\partial B} = \sum_{i=1}^n (Ae^{Bt_i} - d_i)t_i Ae^{Bt_i}$$

Perhatikan bahwa bentuk persamaan di atas tidak dapat dibentuk dalam bentuk matriks. Oleh karena itu, persamaan di atas akan diselesaikan dengan metode numerik, yaitu metode Newton. Misalkan

$$f(A, B) = \sum_{i=1}^n (Ae^{Bt_i} - d_i)e^{Bt_i}$$

$$g(A, B) = \sum_{i=1}^n (Ae^{Bt_i} - d_i)t_i Ae^{Bt_i}$$

Sebagai tebakan awal  $(A_0, B_0)$ . Nilai  $(A, B)$  yang akan membuat  $f(A, B) = 0, g(A, B) = 0$  ditentukan dengan persamaan

$$\vec{x}_{n+1} = \vec{x}_n - J^{-1}(\vec{x}_n)\vec{f}(\vec{x}_n)$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}, \vec{f} = \begin{pmatrix} f(A, B) \\ g(A, B) \end{pmatrix}$$

dimana  $J$  adalah Jacobian dari fungsi  $f(A, B), g(A, B)$  terhadap  $(A, B)$  yaitu

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial A} & \frac{\partial f}{\partial B} \\ \frac{\partial g}{\partial A} & \frac{\partial g}{\partial B} \end{pmatrix}$$

## 1.3.1 Transformasi Bentuk Linear

Bentuk fungsi  $f(t) = Ae^{Bt}$  dapat ditransformasi agar data yang diberikan dapat diestimasi layaknya mengestimasi fungsi linear. Jika masing-masing ruas dihitung nilai ln maka akan diperoleh

$$\ln(f(t)) = \ln(A) + Bt$$

yang merupakan persamaan linear terhadap  $t$  dengan kemiringan  $B$  dan intercept  $\ln(A)$ . Nilai  $B, \ln(A)$  dapat ditentukan sebagai mana menentukan parameter pada fungsi linear dengan sebelumnya mentransformasi data yang diberikan menggunakan ln. Prosedur



yang dapat digunakan untuk menentukan parameter dengan transformasi ini adalah sebagai berikut

1. Diberikan  $n$  pasang data,  $(t_i, d_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .
2. Hitung nilai  $\ln$  dari data  $d_i$  yaitu

$$y_{new_i} = \ln(d_i), \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

3. Tentukan nilai parameter  $B, \ln(A)$  sebagaimana penentuan parameter  $A, B$  pada fungsi linear
4. Untuk mendapatkan parameter  $A$ , hitung nilai eksponensialnya sehingga

$$e^{\ln(A)} = A$$

### 4.3.2 Bekerja dengan Teknologi

Misalkan diberikan data

No	$t$	$d$
1	1	5.80
2	2	8.36
3	3	11.36
4	4	14.60
5	5	17.32
6	6	20.95
7	7	23.23
8	8	26.93
9	9	29.08
10	10	32.97
11	11	35.66
12	12	38.54
13	13	41.78
14	14	44.66
15	15	47.06
16	16	50.10

Data tersebut akan diestimasi menggunakan fungsi eksponensial  $f(t) = Ae^{Bt}$ . Pertama, akan ditentukan nilai  $A, B$  menggunakan transformasi ke bentuk linear.

1. Tuliskan datanya pada Ms. Excel, misalkan pada  $A1 : C17$ . Kolom  $B$  menyimpan data  $t$  dan kolom  $C$  menyimpan data  $y$ .
2. Hitung nilai  $\ln$  dari data  $y$ , misalkan diletakkan pada kolom  $D2 : D17$  dengan rumus

=ln (B2)

3. Siapkan  $2 \times 2$  cell untuk entri matriks  $A$ . Misalkan cell disiapkan pada  $G2 : H3$
4. Isi pada masing-masing entri  $a_{11}, a_{22}, a_{12}, a_{21}$ , dengan rumus



Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengemukakan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.

```
1 -SUM (B2 : B17)
2 -SUM (B2 : B17)
3 -COUNTA (B2 : B17)
4 -SUMSQ (B2 : B17)
```

5. Buat dua cell untuk entri vektor b. Misalkan diletakkan pada K2 : K3. Masing-masing lainnya dilakukan dengan rumus

```
1 -SUM (D2 : D17)
2 -SUMPRODUCT (D2 : D17, B2 : B17)
```

6. Siapkan dua cell untuk menyimpan nilai B, ln(A), A. Misalkan diletakkan pada J5 : J7. Nilai B, ln(A) dihitung dengan rumus

```
1 -MMULT (MINVERSE (G2 : H3), K2 : K3)
```

sedangkan nilai A dihitung dengan rumus

```
1 -EXP (I 6)
```

sehingga menghasilkan nilai

$$B = 0.13$$

$$\ln(A) = 2.06$$

$$A = 7.85$$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	No	t	y	ynew		A	1	2		B	
2	1	1	5.80	7.46		1	746	16		1	50.71
3	2	2	8.35	2.12		2	1406	136		2	475.4207
4	3	3	11.36	2.44							
5	4	4	14.60	2.68				B		0.13	
6	5	5	17.97	2.85				ln(A)		2.06	
7	6	6	20.95	3.04				A		7.85	
8	7	7	23.24	3.15							
9	8	8	26.93	3.29							
10	9	9	29.08	3.37							
11	10	10	32.97	3.50							
12	11	11	35.65	3.57							
13	12	12	38.54	3.65							
14	13	13	41.78	3.73							
15	14	14	44.66	3.80							
16	15	15	47.05	3.85							
17	16	16	50.10	3.91							

Gambar 7: Proses perhitungan parameter ekapponensial  $f(t) = Ae^{Bt}$  dengan Ms. Excel

Menggunakan nilai parameter yang diperoleh,  $A = 7.85$ ,  $B = 0.13$  akan diperoleh error 29.5656 sehingga menghasilkan error relatif

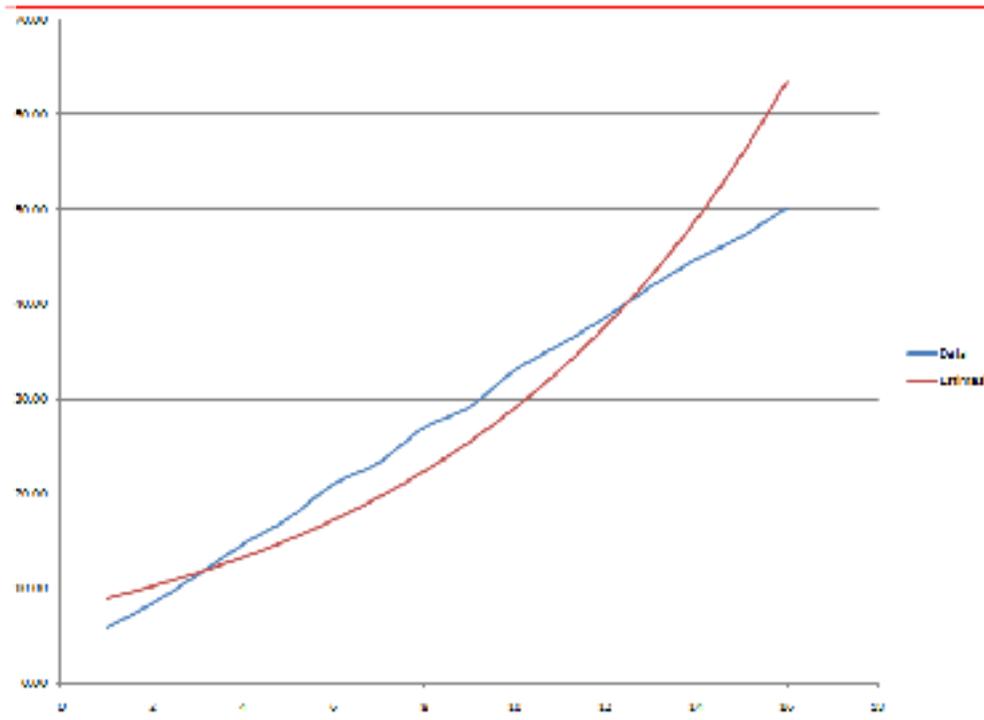
$$Rel(A, B) = \frac{29.5656}{448.40} = 6.59\%$$



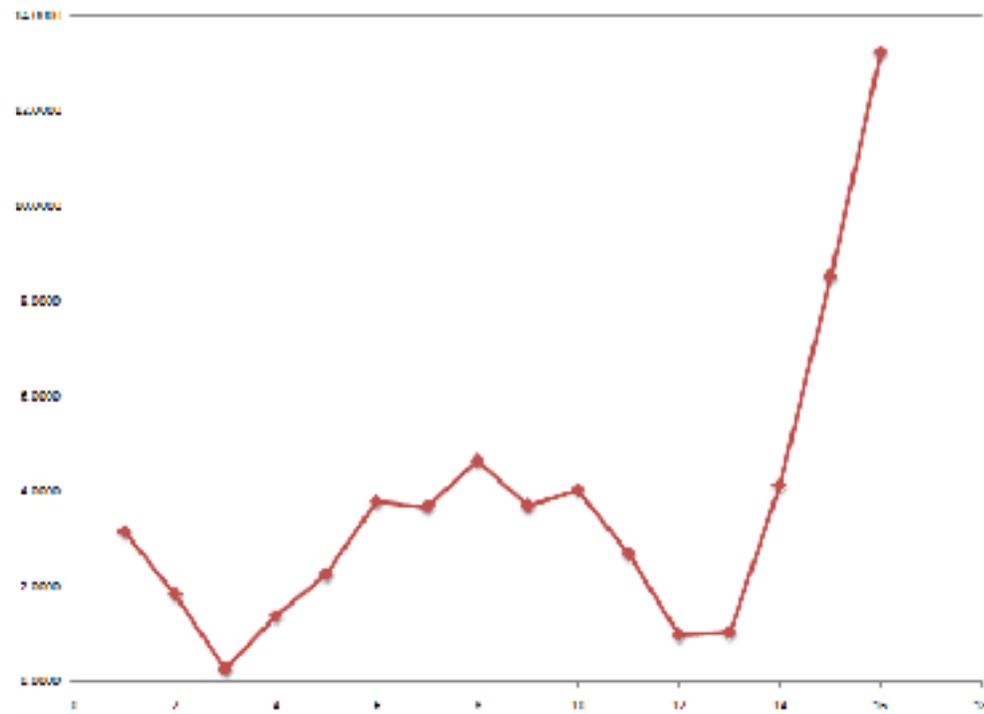
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengemukakan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.

Hasil penggambaran antara data dan fungsi aproksimasi eksponensial ditunjukkan pada Gambar 8



Gambar 8: Kurva bersama antara data dan fungsi aproksimasi berupa fungsi eksponensial  $f(t) = Ae^{kt}$



Gambar 9: Selisih kuadrat antara data dan hampiran tiap  $t$

Selanjutnya, akan ditentukan parameter dari  $f(t) = Ae^{kt}$  secara numerik. Metode



numerik yang digunakan adalah metode Newton. Implementasi dengan Matlab dapat dilihat pada kode terlampir. Hasil yang diperoleh dari Matlab adalah

$$A = 10.7825$$

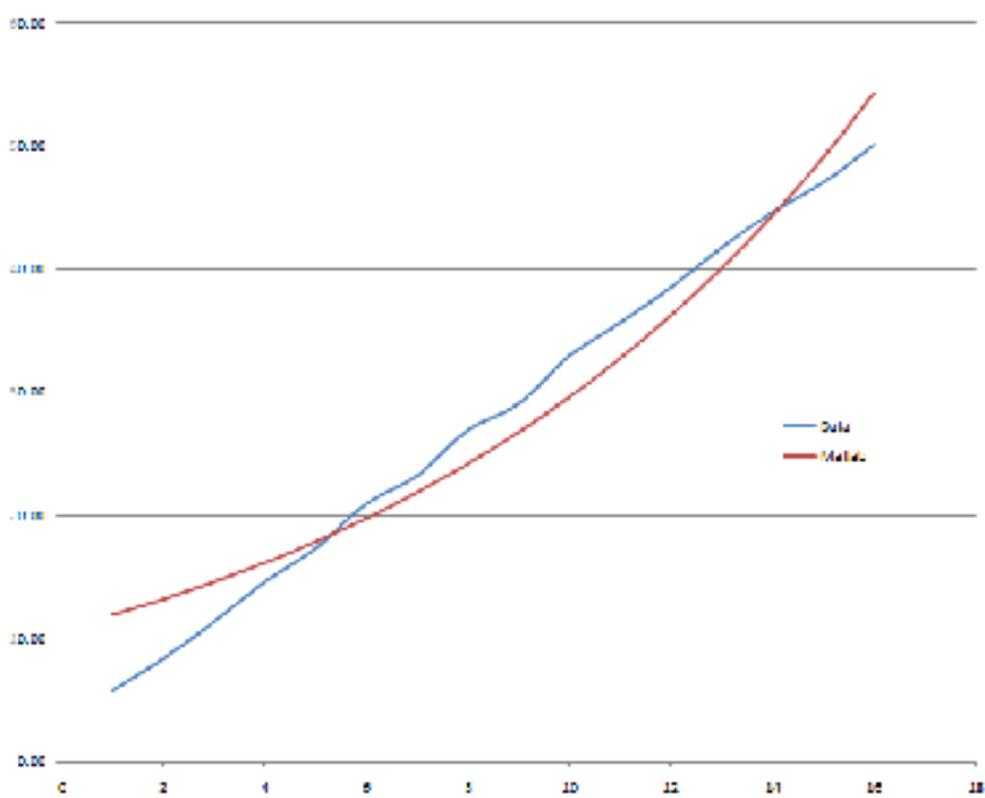
$$B = 0.1010$$

error yang dihasilkan menggunakan Matlab adalah 69.8701 sehingga eror relatifnya adalah

$$Rel(A, B) = \frac{69.8701}{448.40} = 15.58\%$$

Hal ini jelas tampak bahwa metode Newton memiliki eror relatif jauh lebih besar dibandingkan metode analitik dua kali lipat lebih.

Hasil penggambaran antara data dan fungsi aproksimasi ekaponeensial yang parameternya ditentukan menggunakan Matlab ditunjukkan pada Gambar 10.



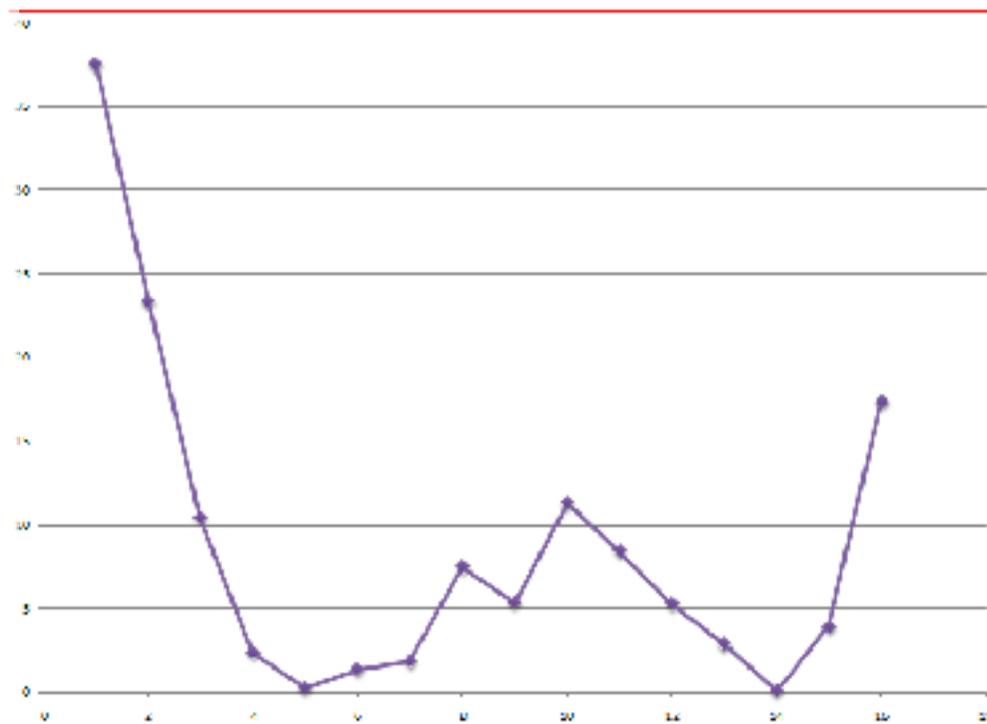
Gambar 10: Kurva bersama antara data dan fungsi aproksimasi berupa fungsi ekaponeensial  $f(t) = Ae^{Bt}$  menggunakan Matlab

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.



1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:  
 a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.  
 b. Pengutipan tidak merdikan kepentingan Universitas Riau.  
 2. Dilarang mengutip dan menyalin sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.



Gambar 11: Selisih kuadrat antara data dan hampiran tiap  $t$  yang menggunakan Matlab

Kode 1.1: Kode Utama Nonlinear Least Square

```

1 clear all;
2 close all;
3 clc;
4 global tau y
5 itmax=1000;
6 =xlread('tesdata.xlsx');
7 =x(:,1);
8 =x(:,2);
9 p=[10;10];
10 fungsi(A0)
11 for i=1:itmax
12     An=A0 (jac(A0)\fungsi(A0));
13     A0=An;
14 end
15 =A0(1)
16 =A0(2)
17 ilai fungsi=fungsi(A0)
18 error fungsi=0.5*sum((A*exp(B*tau)-y).^2)
19 Plotting gambar data dan fungsi
20 figure(1)
21 tem(tau,y)
22 hold on
23 plot(tau,A*exp(B*tau))
    
```

File di atas membutuhkan function fungsi dan jac untuk menghitung nilai fungsi  $f$  dan jacobiananya.

Kode 1.2: Function untuk menghitung fungsi  $f$

```

1 function dy = fungsi (x)
2 global tau y
    
```



Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang  
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:  
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.  
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.  
2. Dilarang mengemukakan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.

```

3 A=x (1) ;
4 B=x (2) ;
5 dy=zeros (2, 1) ;
6 fA=sum ( (A*exp (B.*t) -y) .*exp (B.*t) ) ;
7 fB=A*sum ( (A*exp (B.*t) -y) .*exp (B.*t) .*t) ;
8 dy (1) =fA;
9 dy (2) =fB;
    
```

Kode 1.3: Function untuk menghitung jacobian  $J$

```

1 function dy =jac (x)
2 global t y
3 A=x (1) ;
4 B=x (2) ;
5 y=zeros (2, 2) ;
6 AA=sum (exp (B*t) .^2) ;
7 AB=sum (t .* (exp (B*t) ) .^2 .*A+ (A*exp (B*t) -y) .*t .*exp (B*t) ) ;
8 BA=sum ( (A*exp (B*t) -y) .*t .*exp (B*t) ) +A*sum (t .* (exp (B.*t) .^2) ) ;
9 BB=A*sum (t .^2 .* (exp (B*t) ) .* (2*A*exp (B*t) -y) ) ;
10 dy (1, 1) =fAA;
11 dy (1, 2) =fAB;
12 dy (2, 1) =fBA;
13 dy (2, 2) =fBB;
    
```

## 1.4 Latihan

- Misalkan diberikan data diameter dari pohon akasia milik PTPN V

x	17	19	20	22	23	25	28	31	32	33	36	37	38	39	41
y	19	25	32	51	57	71	113	141	123	187	192	205	252	259	294

Menurut pakar botani, fungsi pertumbuhan tanaman tersebut mengikuti pola persamaan  $y(x) = ax^b$ . Tentukan nilai  $a, b$  berdasarkan data di atas

- Misalkan diberikan data pertumbuhan populasi serangga buah tiap waktu

t	7	14	21	28	35	42
P	8	41	133	250	280	297

dimana  $t$  menunjukkan waktu dan  $P$  menunjukkan jumlah populasi serangga buah setiap waktu. Tentukan nilai parameter jika diinginkan

- $P_1(t) = c_1t$
  - $P_2(t) = ae^{bt}$
  - Manakah yang lebih mendekati kenyataan, model  $P_1(t)$  atau  $P_2(t)$
- Diberikan data hubungan jumlah populasi dengan kecepatan dari orang berjalan.



Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.

No	$V$	$P$
1	2.27	2500
2	2.76	365
3	3.27	23700
4	3.31	5491
5	3.7	14000
6	3.85	78200
7	4.31	70700
8	4.39	138000
9	4.42	304500
10	4.81	341948
11	4.9	49375
12	5.05	260200
13	5.21	867023
14	5.62	1340000
15	5.88	1092759

dengan  $P$  adalah jumlah populasi dan  $V$  adalah kecepatan orang berjalan. Tentukan parameter dari kedua fungsi tebakan berikut ini

(a)  $P(V) = aV^b$

(b)  $P(V) = a \ln(V)$

4. Misalkan diberikan data konsumsi energi tiap tahunnya di wilayah Indonesia

$x$	$y$	$Q$
0	1900	1
10	1910	2.01
20	1920	4.06
30	1930	8.17
40	1940	16.44
50	1950	33.12
60	1960	66.69
70	1970	134.29
80	1980	270.43
90	1990	544.57
100	2000	1096.63

dengan  $y$  menyatakan tahun dan  $Q$  menyatakan jumlah energi yang dihabiskan per tahunnya. Menurut ahli, pola konsumsi energi Indonesia mengikuti fungsi  $Q(x) = ae^{bx}$ . Tentukan nilai  $a, b$  yang sesuai dengan data di atas





# KONFERENSI NASIONAL MATEMATIKA XIX

24 - 28 JULI 2018. WIDYALOKA & MIPA CENTER, UNIVERSITAS BRAWIJAYA MALANG



Malang, 20 Mei 2018

Universitas Riau. n. Khozin Mu'tamar tempat

Universitas Riau. n. Khozin Mu'tamar tempat

Dengan hormat, atas nama panitia Konferensi Nasional Matematika XIX tahun 2018, kami menghormatikan bahwa makalah Bapak/Ibu dengan judul

Optimasi Parameter Pada Model Eksponensial dan Logistik Menggunakan Particle Swarm Optimization

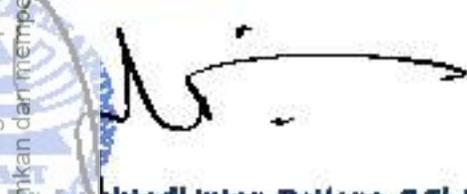
nyatakan **DITERIMA** untuk dipresentasikan dalam KNM XIX. Berkaitan dengan hal tersebut, kami mengundang Bapak/Ibu untuk mempresentasikan makalah dalam sesi **paralel**.

Untuk makalah lengkap mohon diunggah melalui akun Bapak/Ibu, selambat-lambatnya tanggal **24 Juli 2018** dan ditulis sesuai dengan template makalah yang dapat diunduh di <https://knm19ub.org/makalah>.

Has partisipasi Bapak/Ibu, kami ucapkan terima kasih.

Yangtshui, Presiden IndoMS,

Ketua Pelaksana KNM 19,

  
M. Mochtaidi Intan Detiena, S.Si, M.Si  
P. 197511251998022001

  
  
Syariful Anam, S.Si, MT, Ph.D  
NIP. 197801152002121003

Hak Cipta Diindungi Undang-Undang

Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:

- a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
- b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.

Dilarang mengutip dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.

SEKRETARIAT

JURUSAN MATEMATIKA, FNIPA, UNIVERSITAS BRAWIJAYA

Jl. Brawijaya 1, Malang, Jawa Timur, Indonesia 65145

Telp. +62-341-571142, Fax +62-341-571142

Web: <http://knm19ub.org/>





Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

NO. 332 / UN10.F09/ PP / 2018

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.

Sertifikat ini diberikan kepada:

**Khazin Mu`tamar**

yang telah aktif berpartisipasi sebagai pemakalah dengan judul :

## Estimasi Parameter pada Model Eksponensial dan Logistik Menggunakan Particle Swarm Optimization

di Konferensi Nasional Matematika XIX  
pada tanggal 24 Juli - 26 Juli 2018 di Universitas Brawijaya Malang



Dr. Intan Murchtadi, S.Si., M.Si., DEA  
PRESIDEN INDOMS

Malang, 25 Juli 2018



Ratno Bagus Edy Wibowo, S.Si., M.Si., Ph.D  
KETUA JURUSAN MATEMATIKA FMIPA UB



Syaiful Anam, S.Si., MT., Ph.D  
KETUA PELAKSANA KKM XIX



Jurusan Matematika  
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Universitas Brawijaya



IndoMS  
Indonesian Mathematical Society

DISELENGGARAKAN OLEH :

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan umum dan tidak diperjualbelikan.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak kembali tanpa izin Universitas Riau.



## ESTIMASI PARAMETER PADA MODEL EKSPONENSIAL DAN LOGISTIK MENGGUNAKAN PARTICLE SWARM OPTIMIZATION

Khozin Mu'tamar<sup>1\*</sup>, Zulkarnain<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Riau, Indonesia

\* e-mail: khozin.mutamar@unri.ac.id

**Kata Kunci:** Estimasi parameter, model eksponensial, model logistik, algoritma PSO, kurva fitting

**Abstrak.** *Pertumbuhan populasi adalah salah satu bahasan dalam model matematika. Pada proses modeling, seringkali nilai parameter pada model diasumsikan nilainya. Metode estimasi parameter secara analitik hanya terbatas pada fungsi polinomial. Untuk model pertumbuhan yang solusi analitiknya tidak dapat ditentukan, metode estimasi parameter tidak dapat digunakan. Pada artikel ini dibahas algoritma Particle Swarm Optimization (PSO) untuk menentukan parameter dari model pertumbuhan eksponensial dan logistik. Dalam penerapannya, model pertumbuhan eksponensial diselesaikan secara analitik dan logistik diselesaikan secara numerik menggunakan metode Euler; kemudian nilainya dibandingkan dengan data yang diberikan. Pada bagian akhir, simulasi numerik diberikan untuk melihat penerapan PSO dalam menyelesaikan masalah yang diberikan. Sebagai pembandingan, parameter pada model pertumbuhan eksponensial dan logistik akan diestimasi dengan fitting kurva secara linear dan numerik menggunakan metode Gauss-Newton. Hasil simulasi menunjukkan bahwa hasil estimasi parameter menggunakan PSO menghasilkan nilai parameter yang lebih baik dibandingkan dengan menggunakan metode Gauss-Newton dan metode analitik.*

# 1 PENDAHULUAN

Salah bentuk model matematika yang sering digunakan adalah model pertumbuhan eksponensial dan model logistik. Model ini berbentuk persamaan diferensial yang digunakan untuk menggambarkan perilaku pertumbuhan populasi. Model pertumbuhan akan dianalisis kestabilannya baik secara lokal di sekitar titik ekuilibrium maupun secara global. Dalam analisis tersebut, nilai parameter pada persamaan diferensial sangat berpengaruh.

Jika data telah tersedia, parameter dari sebuah persamaan dapat ditentukan dengan menggunakan fitting kurva. Bagian analitik dari fitting kurva terbatas pada persamaan yang dapat memiliki bentuk eksplisit dan sederhana seperti polinomial. Jika persamaan bersifat kompleks seperti mengandung eksponensial, nilai parameter dapat ditentukan dengan fitting kurva secara numerik dengan menggunakan metode Gauss-Newton. Sayangnya, metode Gauss-Newton kurang akurat karena metode ini membutuhkan tebakan nilai awal yang harus diambil di sekitar solusi yang akan ditentukan.

Pada tahun 1995, Eberhart dan Kennedy memperkenalkan algoritma Particle Swarm Optimization (PSO) yang didasarkan pada fenomena serangga dalam menentukan lokasi makanan [1]. Metode ini lebih ringan dibandingkan Genetik Algoritma (GA) karena tidak adanya proses *crossover* dan *mutation* [2]. Algoritma PSO hanya menggunakan perbandingan nilai fitness pada suatu posisi sedangkan GA menggunakan proses *encode* dan *decode* nilai menjadi bilangan binary sehingga komputasi GA relatif lebih lama.

Penggunaan algoritma PSO pada beberapa bidang seperti sistem dinamis dan kontrol telah banyak dikaji. Mobayen et al. [2] menggunakan PSO dan algoritma evolusi pada kontrol autolanding. Min et al. [3] menggunakan PSO dalam kontrol manuver helikopter. Abdelbar et al. [4, 5] mengembangkan pembobotan pada PSO menggunakan fungsi distribusi dan membandingkan antara fungsi distribusi Cauchy dan Gaussian. Swaroopan dan Somasundaram [6] menerapkan PSO dengan modifikasi himpunan fuzzy untuk kasus sistem power DC-OPF.

Pada artikel ini akan dibahas penggunaan algoritma PSO untuk menentukan parameter pada model eksponensial dan logistik berdasarkan data yang telah tersedia. Parameter pada model eksponensial akan diestimasi secara langsung melalui solusi persamaan diferensial eksponensial sedangkan parameter model logistik akan diestimasi dengan menggunakan solusi numerik persamaan diferensial menggunakan metode Euler.

## Fitting Kurva fungsi linear

Misalkan diberikan sejumlah  $n$  pasang data yaitu  $(t, d(t))$  dan fungsi pendekatan bagi data tersebut, yaitu  $f(t) = at + b$ ,  $a, b \in R$ . Error antara data dan fungsi tebakan dapat dituliskan dalam bentuk

$$r(a, b) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (at_i + b - d_i)^2 \tag{1}$$

dimana  $d_i = d(t_i)$ . Tujuan yang ingin dicapai adalah meminimalkan nilai  $r(a, b)$  pada persamaan (1) dengan memilih nilai  $a, b$ . Nilai  $r(a, b)$  minimum akan dipenuhi pada titik kritis  $(a^*, b^*)$  sehingga

$$\frac{\partial r}{\partial a} = \sum_{i=1}^n (at_i + b - d_i)t_i = 0, \quad \frac{\partial r}{\partial b} = \sum_{i=1}^n at_i + b - d_i = 0$$

selanjutnya, turunan parsial tersebut dapat disederhanakan dalam bentuk sistem

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n at_i + b &= \sum_{i=1}^n d_i \\ \sum_{i=1}^n at_i^2 + bt_i &= \sum_{i=1}^n d_i t_i \end{aligned} \right\} \tag{2}$$

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:  
 a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.  
 b. Pengutipan tidak mengizinkan kepada Universitas Riau.  
 2. Dilarang menggunakan dan menyalin sebagian atau seluruh isi artikel ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.



Sistem persamaan (2) dapat dinyatakan dalam  $A\vec{x} = \vec{b}$  dengan  $\vec{x} = (a, b)^T$  dengan solusinya

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b} \quad (3)$$

$$A = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n t_i & \sum_{i=1}^n 1 \\ \sum_{i=1}^n t_i^2 & \sum_{i=1}^n t_i \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n d_i \\ \sum_{i=1}^n d_i t_i \end{pmatrix} \quad (5)$$

### 3 HASIL dan PEMBAHASAN

Pada bagian ini akan diterangkan tentang estimasi parameter pada model eksponensial dan logistik menggunakan algoritma PSO. Untuk perbandingan, akan dilakukan estimasi parameter secara analitik dan secara numerik menggunakan metode Gauss-Newton.

#### 3.1 Fitting kurva model pertumbuhan eksponensial

Model pertumbuhan eksponensial diberikan oleh

$$\frac{dN(t)}{dt} = \alpha N(t), \quad \alpha \in R \quad (6)$$

deengan solusi dari persamaan (6) digunakan pemisahan variabel sehingga diperoleh

$$N(t) = Ce^{\alpha t}, \quad t \in [0, t_f] \quad (7)$$

Bentuk persamaan (7) dapat dituliskan dalam bentuk

$$\ln(N(t)) = \ln(C) + \alpha t, \quad (8)$$

yang merupakan persamaan linear dalam variabel  $t$ . Selanjutnya, nilai  $\ln(N(t))$ ,  $\ln(C)$ ,  $\alpha$  pada persamaan (8) diperoleh menggunakan data dan persamaan (3,4,5).

#### 3.2 Fitting kurva model pertumbuhan logistik

Model pertumbuhan logistik diberikan oleh

$$\frac{dN(t)}{dt} = N(t) (\alpha - \beta N(t)), \quad \alpha, \beta \in R^+ \quad (9)$$

deengan solusi dari persamaan (9) diperoleh dengan pemisahan variabel sehingga diperoleh

$$\ln \left( \frac{N(t)}{1 - \frac{N(t)}{N_{\max}}} \right) = \alpha t + C \quad (10)$$

deengan  $N_{\max} = \alpha/\beta$ . Persamaan (10) merupakan persamaan linear dalam  $t$  dan nilai  $\alpha, C$  dapat dihitung menggunakan data dan persamaan (3,4,5) sedangkan nilai  $\beta$  diperoleh dari  $\beta = \alpha/N_{\max}$ .



### 3.3 Fitting kurva dengan PSO

Particle Swarm Optimization (PSO) menggunakan prosedur pembaharuan nilai posisi dan kecepatan yang diberikan pada persamaan

$$\left. \begin{aligned} V_{k+1}^i &= V_k^i + c_1\gamma (Pb_k^i - X_k^i) + c_2\gamma (Gb_k - X_k^i) \\ X_{k+1}^i &= X_k^i + V_{k+1}^i \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

dengan  $X$  menyatakan posisi swarm yang merupakan calon solusi masalah,  $V$  menyatakan kecepatan swarm untuk bergerak mendekati solusi berikutnya dari posisi awal,  $i$  menyatakan indeks swarm,  $k$  menyatakan indeks urutan iterasi,  $\gamma$  merupakan suatu bilangan random,  $c_1, c_2$  menyatakan nilai kognitif swarm yang nilai standarnya 1.4 [1],  $Pb, Gb$  menyatakan PersonalBest dan GlobalBest yaitu posisi terbaik suatu swarm dan seluruh swarm.

Pada model eksponensial yang diberikan pada persamaan (7), terdapat dua parameter yang tidak diketahui, yaitu  $C$  dan  $\alpha$ . Sedangkan pada model logistik pada persamaan (9), terdapat dua parameter yang perlu untuk diestimasi yaitu  $\alpha$  dan  $\beta$ . Oleh karena itu, pada penerapannya, terdapat dua jenis swarm dengan masing-masing jenis diberikan alokasi sesuai pengaturan PSO. Pada persamaan eksponensial dan logistik, keduanya menggunakan fungsi fitness yang sama yang diberikan pada persamaan (1). Namun, untuk perhitungan nilai fitness, model logistik membutuhkan perhitungan numerik untuk menentukan solusi persamaan diferensial orde dua non linear menggunakan metode Euler untuk setiap swarmnya. Prosedur penentuan parameter dengan menggunakan PSO pada model logistik diberikan pada Algoritma 1

Algoritma 1: Alur penentuan parameter model logistik menggunakan PSO.

- 1: **Input** data, nVar, nSwarm, itMax, tolMax,  $c_1, c_2$
- 2: Random nilai dan kecepatan  $X_0^i, V_0^i$
- 3: Hitung  $V_1^i, X_1^i$  menggunakan persamaan (11)
- 4: Hitung Fitness dengan persamaan (1)
- 5: Tentukan  $Pb, Gb$  dengan memilih  $Pb_1^i = \min(X_1^i), Gb = Pb$
- 6: **procedure**
- 7:     **for** k=1:itMax **do**
- 8:         Hitung  $V_{k+1}^i, X_{k+1}^i$  dengan persamaan (11)
- 9:         Hitung Fitness dengan persamaan (1)
- 10:         Tentukan  $Pb$  dengan  $Pb_{k+1}^i = \min(X_m^i), m = 1, \dots, k + 1$
- 11:         Tentukan  $Gb$  dengan  $Gb_{k+1} = \min(Pb_{k+1}^i)$
- 12:         **if** abs( $Gb_{k+1} - \text{mean}(X_i)$ ) < tolMax **then**
- 13:             break;
- 14:         **end if**
- 15:     **end for**
- 16: **end procedure**

#### Simulasi numerik

Pada bagian ini diberikan perbandingan hasil estimasi parameter dari segi waktu komputasi, jumlah iterasi maupun eror antara hasil estimasi dengan data untuk metode analitik, metode Gauss-Newton dan algoritma PSO. Untuk keperluan simulasi numerik, digunakan parameter dasar yang diberikan pada Tabel 1.

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:  
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.  
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.  
2. Dilarang menyalin dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dengan cara apapun tanpa izin Universitas Riau.



No	Parameter	Simbol	Nilai
1	Tebakan Awal $A$ metode GN	$A_0$	Disesuaikan dataset
2	Tebakan Awal $B$ metode GN	$B_0$	Disesuaikan dataset
3	Kognitif PSO	$c_1, c_2$	{1.2, 1.8, 2.4}
4	Jumlah Swarm	$nS$	{30, 100, 150}
5	Iterasi Maksimum	itMax	1000
6	Toleransi Error Maksimum	tolMax	$1e - 10$

Tabel 1: Nilai parameter dalam simulasi

Hasil simulasi untuk model eksponensial dengan dataset pertumbuhan ikan Trout [7] diberikan pada Tabel 2, sedangkan untuk dataset kenaikan tekanan terhadap ketinggian [8] ditunjukkan pada Tabel 3.

No	Metode	$A_0$	$B_0$	$nS$	$i$	TOC	$A_i$	$B_i$	Error
1	Analitik	—	—	—	—	—	30.93846	0.007	310285.13
2	GN	25	0.05	—	100	1.82054	40.9373	0.00688	39036.00
3	GN	25	2	—	100	1.83147	NaN	NaN	NaN
4	PSO	—	—	30	42	7.53819	40.93733	0.00688	39036.09
5	PSO	—	—	100	42	7.14031	40.93733	0.00688	39036.09
6	PSO	—	—	150	42	8.27784	40.93733	0.00688	39036.09

Tabel 2: Perbandingan seluruh metode pada model eksponensial [7]

No	Metode	$A_0$	$B_0$	$nS$	$i$	TOC	$A_i$	$B_i$	Error
1	Analitik	—	—	—	—	—	1103.233	-0.147	10595.97
2	GN	100	0	—	100	1.45701	1037.1	-0.13507	2132.542
3	GN	800	0	—	100	1.46685	-813380	0.22619	2.23e21
4	PSO	—	—	30	36	6.18584	1037.102	-0.13507	2132.542
5	PSO	—	—	100	36	5.11084	1037.102	-0.13507	2132.542
6	PSO	—	—	150	36	4.79512	1037.102	-0.13507	2132.542

Tabel 3: Perbandingan seluruh metode pada model eksponensial [8]

dampak pada Tabel 2 dan Tabel 3 metode PSO mendapatkan hasil terbaik dibandingkan dengan analitik maupun metode Gauss-Newton. Hal ini dilihat dari nilai pada kolom Error. Hasil metode Gauss-Newton memberikan nilai yang berbeda karena metode ini membutuhkan pemilihan nilai awal yang tepat. Kesalahan pemilihan nilai awal dapat berdampak metode ini seperti ditunjukkan pada Tabel 2 dengan nilai awal  $A_0 = 25, B_0 = 2$ .

Hasil simulasi untuk model pertumbuhan logistik dengan dataset pertumbuhan populasi Eng-dan Wales [9] diberikan pada Tabel 4, sedangkan untuk dataset pertumbuhan bunga mata-[10] ditunjukkan pada Tabel 5. Dari Tabel 4 terlihat bahwa PSO mendapatkan hasil lebih dibandingkan analitik sedangkan pada Tabel 5 nilai analitik lebih baik dibanding PSO.

No	Metode	$nS$	$i$	TOC	$A_i$	$B_i$	Error
1	Analitik	—	—	—	0.016	0.00028	187.42
2	PSO	30	257	2.1253	9.6617	0.0778	127.69
3	PSO	100	262	5.5139	9.6617	0.0778	127.69
4	PSO	150	252	7.538	9.6617	0.0778	127.69

Tabel 4: Perbandingan metode analitik dan PSO model logistik [9]



No	Metode	$nS$	$i$	TOC	$A_i$	$B_i$	Eror
1	Analitik	—	—	—	0.089	0.0003	86.682
2	PSO	30	299	1.11	75.457	0.3014	403.1
3	PSO	100	248	2.3782	76.689	0.3072	391.01
4	PSO	150	250	3.4542	76.689	0.3072	391.01

Tabel 5: Perbandingan metode analitik dan PSO model logistik [10]

#### 4 KESIMPULAN

Berdasarkan hasil uji komputasi yang telah dilakukan, melihat eror antara data dan hasil estimasi dapat disimpulkan bahwa algoritma PSO mampu menghasilkan estimasi parameter yang baik dibandingkan Gauss-Newton dan secara analitik. Oleh karena itu, metode ini dapat digunakan sebagai alternatif dalam masalah estimasi parameter khususnya dalam sistem dinamis.

#### REFERENCES

[1] Bratton, D. dan Kennedy, J., Defining a standard for particle swarm optimization. *Proceeding of the 2007 IEEE Swarm Intelligence Symposium*, (1-4244-0708-7/07), 2007

[2] Mobayen, S., Rabiei, A., Moradi, M., dan Mohammady, B., Linear quadratic optimal control system design using particle swarm optimization algorithm. *International Journal of the Physical Sciences*, 6(30):6958-6966, November, 2011.

[3] Byoung-Mun Min, Hyo-Sang Shin, dan Min-Jea Tahk. Control system design for autonomous helicopter using particle swarm optimization. *25th International Congress of the Aeronautical Science*, Halaman 1-7, 2006.

[4] Abdelbar, A.M., Abdelshahid, S., dan Wunsch, D.C., Gaussian versus cauchy membership functions in fuzzy PSO. *Proceeding of International Joint Conference on Neural Network*, 978-1-4244-1379-9, Halaman 2902-2907, Agustus 2007.

[5] Abdelbar, A.M., Abdelshahid, S., dan Wunsch, Fuzzy pso : A generalization of particle swarm optimization. *Proceeding of International Joint Conference on Neural Network*, (0-7803-9048-2/05):1086-1091, Juli 2005.

[6] Swaroopan, N.M.J dan Somasundaram, P., Fuzzified PSO algorithm for DC-OPF of interconnected power system. *Journal of Theoretical and Applied Information Technology*, Halaman 44-52, 2010.

[7] <http://resources.seattlecentral.edu/qelp/sets/023/023.html>, tanggal akses 26 April 2018, 10.15WIB

[8] <http://resources.seattlecentral.edu/qelp/sets/024/024.html>, tanggal akses 26 April 2018, 10.15WIB

[9] <http://resources.seattlecentral.edu/qelp/sets/007/007.html>, tanggal akses 26 April 2018, 10.15WIB

[10] <http://resources.seattlecentral.edu/qelp/sets/009/009.html>, tanggal akses 26 April 2018, 10.15WIB

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:

- a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
- b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.

2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.



# ESTIMASI PARAMETER PADA MODEL EPIDEMI SIR MENGGUNAKAN PARTICLE SWARM OPTIMIZATION

Khozin Mutamar<sup>1\*</sup>, Zulkarnain<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Riau  
\*email: khozin.mutamar@unri.ac.id

## ABSTRAK

Model *Susceptible, Infected dan Resistant (SIR)* digunakan untuk mengamati penyebaran infeksi dari populasi yang terjangkit penyakit pada populasi sehat yang rentan. Analisis model dilakukan menggunakan kriteria Routh-Hurwitz, bilangan reproduksi dasar ataupun teori kestabilan Lyapunov. Untuk analisis kestabilan ini dibutuhkan nilai parameter yang biasanya diasumsikan nilainya. Data yang tersedia tidak dapat digunakan untuk menentukan nilai parameter dari model SIR karena merupakan sistem persamaan diferensial nonlinear yang solusi eksaknya tidak dapat ditentukan. Pada artikel ini, akan dilakukan penentuan parameter dari model pertumbuhan eksponensial, logistik dan model epidemi SIR menggunakan algoritma Partikel Swarm Optimization (PSO). Model SIR diselesaikan secara numerik menggunakan metode Euler berdasarkan nilai parameter yang ditentukan dengan PSO. Hasil simulasi menunjukkan bahwa PSO cukup baik dalam menentukan parameter ketiga model dibandingkan dengan metode analitik dan metode numerik Gauss-Newton.

**Kata kunci:** Model pertumbuhan, model epidemi SIR, fitting kurva, algoritma PSO, estimasi parameter

## ABSTRACT

*Susceptible, Infected and Resistant (SIR)* models are used to observe the spread of infection from infected populations into healthy populations. Stability analysis of the model is done using the Routh-Hurwitz criteria, basic reproduction number or the Lyapunov Stability. For stability analysis, parameters value are needed and these values is usually assumed. Given data cannot be used to determine the parameter values of SIR model because of analytic solution of system of nonlinear differential equation cannot be determined. In this article, we will determine the parameters of the exponential growth model, logistic model and SIR models using the particle Swarm Optimization (PSO) algorithm. The SIR model is solved numerically using the Euler method based on the parameter values determined by PSO. The simulation results show that the PSO algorithm is good enough in determining the parameters of the three models compared to analytical methods and the Gauss-Newton numerical method.

**Keywords:** Growth mathematical model, SIR model, curve fitting, PSO algorithm, parameter estimation

## Pendahuluan

Pada era globalisasi dan teknologi seperti sekarang ini, setiap kejadian akan terdokumentasi akibat dukungan smartphone dan akses internet berlimpah. Akibatnya, data kejadian di setiap waktu dan lokasi dapat dikumpulkan dan diolah dengan baik karena ketersediaan data sangat lengkap. Keberadaan data tidak lagi dihasilkan dari eksperimen di dalam laboratorium, tetapi dari segala aspek kehidupan masyarakat modern. Banyak media, contohnya media sosial seperti facebook dan twitter yang memproduksi data. Sebagai contoh, datao pemerintah yang berujung viral, kemudian dikemas dalam sebuah polling di twitter terkait reaksi dai pendukung dan anti pemerintah. Data-data ini juga disediakan terbuka, baik oleh lembaga yang memang khusus menyimpan data, ataupun media sosial tempat masyarakat melalukan pengambilan data. Bahkan, beberapa software saat ini seperti R juga menyertakan paket data yang merupakan hasil pengumpulan data dari para tim pendukung pengembangan software tersebut.

Model matematika dapat diartikan sebagai persamaan matematis yang menjelaskan perilaku di dunia nyata. Persamaan ini dibentuk dengan mentransformasi bentuk kejadian di masyarakat menjadi variabel ataupun parameter. Model matematika yang cukup banyak digunakan adalah model yang berbentuk persamaan diferensial. Contohnya, model gerak baik itu pegas, pendulum ataupun manuver pesawat, dinyat akan d dalam

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang memperjualbelikan atau menyebarkan secara komersial sebagian atau seluruh isi dan gambar yang terdapat dalam publikasi ini di luar batas-batas hak cipta Universitas Riau.



1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:

- a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengumpulkannya atau memuatnya dalam publikasi ilmiah.



sistem persamaan diferensial biasa. Selain itu, model penyebaran penyakit yang lebih dikenal dengan model *Susceptible, Infected, Resistant* (SIR) juga dinyatakan dalam sistem persamaan diferensial biasa. Model SIR sangat banyak digunakan untuk menganalisis penyebaran penyakit di lingkungan manusia seperti virus Ebola [10], Zika [2], Malaria [4], Diabetes [11]. Bukan hanya penyakit yang menyerang fisik, tetapi penyakit yang bersifat kebiasaan buruk juga dapat dianalisis dengan model SIR. Mu'tamar [7] mengembangkan model SIR untuk menganalisis penyebaran kebiasaan mengkonsumsi minuman beralkohol serta menerapkan kontrol optimum untuk tindakan pengobatan. Selain untuk lingkungan manusia, model SIR juga dapat digunakan untuk menganalisis penyebaran virus pada lingkungan komputer [12]. Jika model matematika ini dikombinasikan dengan data, maka matematika dapat menjadi alat yang sangat baik untuk pengamatan lingkungan dan dasar pengambilan kebijakan. Namun sayangnya, untuk mengolah data dan model matematika berupa persamaan diferensial biasa tidaklah mudah. Hal ini dikarenakan proses yang digunakan menggunakan kurva fitting yang selama ini hanya dilakukan pada fungsi yang memiliki bentuk eksplisit. Hal yang sukar dilakukan pada model SIR dikarenakan model ini tidak dapat diselesaikan secara analitik sehingga solusi persamaan dalam bentuk eksplisit tidak dapat ditentukan.

Pada tahun 1995, Eberhart dan Kennedy memperkenalkan suatu metode pencarian yang dinamakan *Particle Swarm Optimization* [1]. Metode ini dikembangkan dari perilaku kawanan hewan seperti lebah dan semut dalam menemukan lokasi makanan. Metode ini tidak membutuhkan teori matematika yang kompleks seperti Jacobian ataupun Hessian dalam menentukan solusi ataupun maksimum dari sebuah sistem persamaan nonlinear. Oleh karena itu, penggunaannya sangat luas terutama dalam bidang kontrol. Naiborhu et al [9] menggunakan PSO untuk menentukan lintasan alternatif ketika metode *exact linearization* gagal dalam menentukan kontrol dari sistem nonlinear karena diskontinuitas. Mutamar [8] menggunakan PSO dan dikombinasikan dengan logika fuzzy untuk menentukan matriks pembobot pada kontrol LQR yang diaplikasikan pada sistem lajak kendali. Hasni [5] menggunakan PSO untuk menentukan parameter pada model iklim GreenHouse dan dibandingkan dengan algoritma genetika. Jalilvand [6] menggunakan PSO dan memodifikasi aspek bilangan random menggunakan rasio posisi dan personalBest sehingga mempercepat proses pencarian solusi. Chiu [3] menerapkan PSO untuk menentukan parameter pada array antenna sehingga gangguan sinyal dapat diminumkan. Solihin [13] memanfaatkan PSO untuk menentukan parameter kontrol optimum yang diaplikasikan pada bentuk linear bandul terbalik.

Perlu ditekankan disini, penelitian yang sudah dilakukan, parameter yang akan ditentukan menggunakan PSO merupakan parameter dari fungsi atau fungsional yang secara eksplisit telah tersedia. Model GreenHouse pada [5] menggunakan model matematis yang solusi eksplisitnya tersedia sehingga nilai fitness dapat dihitung dengan mudah. Pada penelitian ini, parameter yang ditentukan nilainya adalah parameter dari model matematis yang solusinya tidak tersedia menggunakan metode analitik. Penentuan solusi akan ditentukan secara numerik dan kinerja metode PSO akan dianalisis dengan uji statistik menggunakan data simulasi.

Artikel ini disusun dengan sistematika berikut. Metode dan bahan penelitian akan dijelaskan setelah bab ini. Bab selanjutnya menerangkan hasil dan pembahasan dari penelitian yang telah dilakukan. Simulasi numerik diberikan di akhir bab pembahasan untuk menunjukkan efektivitas metode PSO dalam menentukan parameter model dari tiga model yang diberikan dan dari beberapa data sekunder yang diambil dari berbagai sumber. Kesimpulan dan saran diberikan pada bagian terakhir untuk merangkum seluruh hasil penelitian.

### Metode dan Bahan Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini merupakan studi kepustakaan, yang mengembangkan penelitian sebelumnya. Oleh karena metode estimasi parameter pada sistem dinamis belum dilakukan pada penelitian sebelumnya, maka pada penelitian ini akan dilakukan pada model yang sederhana yaitu model pertumbuhan eksponensial dan logistik. Selanjutnya, metode akan diterapkan pada model epidemi *Susceptible, Infected dan Resistant* (SIR). Langkah kerja dalam penelitian ini adalah

1. Menentukan data yang akan digunakan sebagai bahan kerja yang karakteristiknya memenuhi model eksponensial dan logistik.
2. Menentukan solusi analitik dari model eksponensial dan logistik. Kedua model ini melibatkan dua parameter yang tidak diketahui nilainya.

penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.

Universitas Riau.

**Fitting Kurva Fungsi Linear**

Misalkan diberikan pasang data  $(t_i, d_i)$  dengan  $i = 1, 2, \dots, n$  dan dipilih fungsi hampiran bagi data tersebut,  $r(a_0, a_1, t) = a_0 + a_1 t$  dengan  $a_0, a_1$  dengan  $0$ . Didefinisikan error antara data dan fungsi hampiran yaitu

$$r(a_0, a_1, t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (a_0 + a_1 t_i - d_i)^2 \tag{1}$$

dengan  $(a_0, a_1)$ . Tujuan yang ingin dicapai adalah meminimalkan nilai  $r(a_0, a_1, t)$  pada persamaan (1) dengan memilih  $a_0, a_1$  yang sesuai. Nilai  $(a_0, a_1)$  akan meminimalkan persamaan (1) jika memenuhi

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial a_0} &= \sum_{i=1}^n (a_0 + a_1 t_i - d_i) \\ \frac{\partial r}{\partial a_1} &= \sum_{i=1}^n (a_0 + a_1 t_i - d_i) t_i \end{aligned} \right\} \tag{2}$$

dengan  $\frac{\partial r}{\partial a_0} = 0, \frac{\partial r}{\partial a_1} = 0$  sehingga menghasilkan

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n a_0 + a_1 t_i &= \sum_{i=1}^n d_i \\ \sum_{i=1}^n a_0 t_i + a_1 t_i^2 &= \sum_{i=1}^n d_i t_i \end{aligned} \right\} \tag{3}$$

Sistem persamaan (3) dapat dinyatakan dalam sistem persamaan linear  $A \cdot r = b$  dengan  $r = (a_0, a_1)$  dan

$$A = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n 1 & \sum_{i=1}^n t_i \\ \sum_{i=1}^n t_i & \sum_{i=1}^n t_i^2 \end{pmatrix} \tag{4}$$

$$r = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n d_i \\ \sum_{i=1}^n d_i t_i \end{pmatrix} \tag{5}$$

**Particle Swarm Optimization (PSO)**

Particle Swarm Optimization (PSO) merupakan metode heuristik yang digunakan untuk menentukan solusi fungsi tujuan yang didasarkan perilaku hewan kawanan semut atau lebah yang dikembangkan oleh Kennedy dan Eberhart pada tahun 1995. Solusi fungsi tujuan merupakan posisi swarm yang dihitung dengan persamaan

$$X_{k+1}^i = X_k^i + V_{k+1}^i \tag{6}$$

dimana  $V_{k+1}^i$  adalah kecepatan gerak swarm yang dinyatakan dalam persamaan

$$V_{k+1}^i = V_k^i + c_1 \gamma (Pb_k^i - X_k^i) + c_2 \gamma (Gb_k^i - X_k^i) \tag{7}$$

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:

- a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
- b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.

2. Dilarang menggunakan atau memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.



Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:  
 a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.  
 b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.  
 2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak secara komersial atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun.



Definisi dari simbol pada persamaan (6), (7) diberikan pada Tabel 1.

**Tabel 1.** Pengertian simbol dari persamaan (6), (7) pada Algoritma PSO

No	Simbol	Keterangan
1.		Posisi swarm ke pada iterasi ke
2.		Kecepatan gerak swarm ke pada iterasi ke
3.		Kognitif individu dan sosial swarm suatu bilangan yang menyatakan tingkat kemampuan swarm untuk menentukan solusi dan kemampuan untuk berkebang bersama kawanannya. Nilai terbaik berdasarkan penelitian adalah + 4. [1]
4.		Bilangan acak yang dihasilkan komputer
5.		PersonalBest, solusi terbaik dari posisi swarmke-i dari iterasi pertama hingga
6.		GlobalBest, solusi terbaik dari seluruh swarmdari seluruh iterasi

**Model Epidemologi Susceptible, Infected dan Resistant (SIR)**

Model epidemologi SIR merupakan model matematika yang berbentuk sistem persamaan diferensial biasa yang digunakan untuk menggambarkan penyebaran penyakit dari individu yang telah terinfeksi. Model epidemologi SIR dinyatakan dalam persamaan

$$\left. \begin{aligned} s'(t) &= -\alpha s(t)i(t) \\ i'(t) &= \alpha s(t)i(t) - \beta i(t) \\ r'(t) &= \beta i(t) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

dengan  $s(0) = S_0, i(0) = I_0, r(0) = R_0$  dan  $s(t) + i(t) + r(t) = 1$  untuk setiap waktu  $t$ . Variabel dan parameter pada persamaan (8) diterangkan pada Tabel 2.

**Tabel 2.** Pengertian parameter dan variabel pada persamaan (8)

No	Simbol	Keterangan
1.	$S_0$	Jumlah individu yang sehat dan rentan untuk tertular penyakit pada waktu $t=0$
2.	$I_0$	Jumlah individu yang terjangkit penyakit dan dapat menularkan penyakit pada waktu $t=0$
3.	$R_0$	Jumlah individu yang telah terjangkit penyakit dan sembuh dari penyakit serta diasumsikan tidak akan tertular penyakit kembali pada waktu $t=0$
4.	$\alpha$	Laju infeksi penyakit oleh populasi yang terjangkit penyakit pada populasi sehat akibat interaksi keduanya, dengan $\alpha > 0$ .
5.	$\beta$	Laju penyembuhan dari penyakit yang pada individu terinfeksi secara proporsional, dengan $\beta > 0$ .

**Metode Gauss-Newton**

Misalkan diberikan sistem persamaan nonlinear  $f(x) = 0$ . Nilai  $x^*$  adalah akar dari sistem persamaan nonlinear jika memenuhi  $f(x^*) = 0$ . Untuk menentukan solusi dari sistem persamaan nonlinear, dapat digunakan metode Gauss Newton, dimana

$$x_{n+1}^r = x_n^r - J^{-1}(x_n^r) f(x_n^r) \quad (9)$$

dengan  $x_0^r$  adalah tebakan awal dan  $J$  adalah matriks Jacobian dari sistem persamaan nonlinear, yaitu

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:

- a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengumbar atau memperbanyak salinan secara komersial.



**Metode Euler untuk Sistem Persamaan Diferensial Biasa**

Misalkan diberikan sistem persamaan diferensial biasa orde satu dan autonomus,  $\dot{y} = f(t, y)$  dengan nilai awal  $(t = 0) = y_0$  yang terdefinisi pada interval  $[0, T]$ . Metode Euler untuk menyelesaikan solusi numerik dari sistem persamaan diferensial biasa diberikan oleh

$$y_{n+1}^r = y_n^r + hf(t_n, y_n^r) \tag{10}$$

dengan  $h$  adalah lebar partisi.

**Hasil dan Pembahasan**

Pada bagian ini akan dibahas tentang penentuan parameter yang terdapat pada model pertumbuhan eksponensial, logistik dan model epidemi SIR. Metode penentuan parameter yang akan digunakan meliputi metode eksak, metode numerik menggunakan Gauss-Newton dan algoritma PSO. Untuk model logistik, penentuan parameter akan dilakukan dengan metode eksak dan algoritma PSO. Metode Gauss-Newton membutuhkan turunan parsial terhadap masing-masing variabel yang mengakibatkan persamaan yang terlibat dalam model logistik menjadi sangat kompleks. Pada model epidemi SIR, metode penentuan parameter yang digunakan hanyalah algoritma PSO dikarenakan tidak terdapatnya metode analitik untuk menyelesaikan sistem persamaan diferensial SIR.

**Penentuan Parameter Model Eksponensial.**

Model pertumbuhan eksponensial dinyatakan dalam bentuk persamaan diferensial biasa orde satu linear, yaitu

$$\frac{dN(t)}{dt} = \lambda N(t) \tag{11}$$

dengan  $\lambda$  adalah parameter kesebandingan yang nilainya positif untuk menggambarkan peningkatan dan negatif untuk penurunan. Solusi analitik model pertumbuhan eksponensial menggunakan pemisahan variabel diberikan oleh

$$N(t) = N_0 e^{\lambda t} \tag{12}$$

dengan  $N_0$  adalah nilai awal, yaitu nilai  $N(t)$  ketika  $t = 0$ . Untuk menentukan parameter pada persamaan (12), persamaan (12) perlu dinyatakan dalam persamaan linear. Transformasi logaritma natural pada masing-masing ruas pada persamaan (12) akan menghasilkan

$$\ln(N(t)) = \lambda t + \ln(N_0) \tag{13}$$

Persamaan (13) merupakan persamaan linear terhadap  $t$  dengan kemiringan  $\lambda$  dan *intercept*  $\ln(N_0)$ . Untuk menentukan parameter  $\lambda$ , dari model eksponensial dari data yang diberikan dapat dilakukan dengan prosedur sebagai berikut

**Algoritma 1.** Penentuan parameter model eksponensial dengan data  $(t_i, N_i)$

- : Input data  $(t_i, N_i)$
- : Transformasi data menggunakan logaritma natural  $\ln(\cdot)$ , sebut  $x_i$
- : Bentuk matriks  $X$  berdasarkan persamaan (4) menggunakan data  $x_i$
- : Bentuk vektor  $Y$  berdasarkan persamaan (5) menggunakan data  $N_i$  dan  $x_i$
- : Selesaikan SPL untuk mendapatkan nilai parameter  $\lambda$

**Penentuan Parameter Model Logistik.**

Model pertumbuhan logistik merupakan model perbaikan dari model eksponensial dengan mengubah nilai kesebandingan dengan sebuah fungsi linear dengan kemiringan negatif. Bentuk model pertumbuhan logistik diberikan oleh

$$\frac{dN(t)}{dt} = (a - bN(t))N(t) \tag{14}$$

dengan  $r$ , adalah parameter positif yang menyatakan proporsi pertumbuhan alami dan penurunan akibat saturasi populasi. Menggunakan metode pemisahan variabel, akan diperoleh solusi analitik dari persamaan (4) yaitu

$$\ln \left( \frac{N(t)}{1 - \frac{N(t)}{N_{\max}}} \right) = at + c \tag{15}$$

dengan  $N_{\max}$  adalah populasi maksimum. Persamaan (15) merupakan persamaan linear terhadap  $t$  dengan kemiringan  $a$  dan *intercept*  $c$ . Untuk menentukan parameter  $a$ , dari model logistik dari data yang diberikan dapat dilakukan dengan prosedur sebagai berikut

**Algoritma 2.** Penentuan parameter model logistik dengan data  $(t, N)$

- : Input data  $(t, N)$
- : Tetapkan nilai  $N_{\max}$  adalah populasi maksimum dari  $N$  ditambah konstanta positif tertentu
- : Transformasi data menggunakan ruas kiri pada persamaan (15), sebut  $Y$
- : Bentuk matriks  $X$  berdasarkan persamaan (4) menggunakan data  $t$
- : Bentuk vektor  $Y$  berdasarkan persamaan (5) menggunakan data  $N$  dan  $N_{\max}$
- : Selesaikan SPL untuk mendapatkan nilai parameter  $a$
- : Nilai parameter  $c$  ditentukan dengan  $c = Y - aX$

**Penentuan Parameter Model SIR dengan PSO.**

Untuk menentukan parameter dengan PSO diperlukan solusi dari model epidemi SIR. Oleh karena model epidemi SIR tidak dapat diselesaikan secara analitik maka model ini akan diselesaikan secara numerik, menggunakan metode Euler. PSO menggunakan swarm untuk menemukan sumber makanan, yang dalam komputasi merupakan solusi dari permasalahan. Oleh karena terdapat  $(n)$  parameter dalam model epidemi SIR, dalam hal ini  $n$ , dengan masing-masing parameter menggunakan  $n$  swarm serta diupdate sebanyak  $n$  perhitungan maka  $M$  adalah matriks posisi dari swarm PSO yang menyimpan solusi dan dinyatakan dengan

$$x(nV \times nS, itM) \tag{16}$$

$M$  yang sama berlaku bagi  $n$  sebagai matriks kecepatan gerak bagi swarm PSO. Setiap swarm memiliki riwayat pencarian sendiri dan akan menyimpan hasil pencarian terbaik sebagai personalBest. Oleh karena itu didefinisikan matriks personalBest sebagai riwayat pencarian masing-masing PSO yaitu

$$Pb(nS \times nV, itM) \tag{17}$$

Hasil pencarian seluruh swarm pada satu variabel akan dipilih yang terbaik sebagai acuan langkah gerak seluruh swarm yang dikenal dengan globalBest. GlobalBest merupakan matriks posisi terbaik seluruh swarm pada satu parameter di seluruh iterasi berjalan sehingga didefinisikan

$$Gb(nV, itM) \tag{18}$$

GlobalBest dan personalBest ditentukan berdasarkan nilai fitness. Nilai fitness adalah nilai fungsi yang akan ditentukan solusinya. Nilai fitness pada model epidemi SIR adalah selisih mutlak antara data dan solusi numerik yang dihasilkan menggunakan metode Euler dengan data parameter dari PSO.

Langkah penentuan parameter pada model epidemi SIR menggunakan PSO diberikan pada Algoritma 3 dan nilai fitness ditentukan dengan prosedur yang diberikan pada Algoritma 4.

**Algoritma 3.** Penentuan parameter model epidemi SIR menggunakan PSO dengan data  $(t, N)$

- : Input data  $(t, N)$ .
- : Input parameter PSO,  $n, nS, nV = 1 \ 3$ .

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:  
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.  
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.  
2. Dilarang mengutip atau menyalin dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.



Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:  
 a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.  
 b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.  
 2. Dilarang memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini, baik secara fisik maupun elektronik, dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.

3. Input parameter numerik  $\alpha = 1 - 5$ .
4. Tetapkan posisi swarm pada iterasi 1 secara acak.
5. Tetapkan kecepatan swarm pada iterasi 1 secara acak.
6. Hitung nilai fitness berdasarkan Algoritma 4.
7. Tetapkan personalBest, yaitu nilai posisi swarm pada iterasi ke-1.
8. Tetapkan globalBest, yaitu nilai posisi swarm yang memberi nilai fitness terbaik.
9. For  $i=1$  :itM
  10. Update nilai posisi swarm dengan persamaan (6)
  11. Update nilai kecepatan swarm dengan persamaan (7)
  12. Hitung nilai fitness dengan swarm iterasi ke- dengan Algoritma 4.
  13. Tentukan personalBest masing-masing swarm dari iterasi 1 sampai iterasi
  14. Tentukan globalBest seluruh swarm dari iterasi 1 sampai iterasi
  15. Periksa kebenaran salah satu kondisi berikut
    - a. selisih swarm iterasi ke dengan  $- 1$  kurang dari sama dengan tolM
    - b. selisih nilai fitness seluruh parameter kurang dari sama dengan tolM
    - c. iterasi maksimum telah tercapai
  16. Jika salah satu kriteria bernilai benar, iterasi dihentikan
17. End for.

**Algoritma 4.** Perhitungan nilai fitness menggunakan metode Euler

1. Input data ( , , ).
2. Input nilai awal SIR, , , .
3. Selesaikan model SIR pada persamaan (8) dengan nilai awal dan parameter , pada seluruh swarm, , ( , ) untuk  $= 1,2,...,$  menggunakan metode Euler pada persamaan (10).
4. Hitung selisih mutlak solusi  $= | - ( , ) |$
5. Urutkan nilai dari terkecil hingga terbesar

**Simulasi Numerik**

Pada bagian ini dilakukan simulasi numerik untuk melihat perbandingan antara metode analitik, Gauss Newton dan PSO dalam menentukan parameter model dinamis. Untuk keperluan simulasi numerik, parameter besar yang digunakan pada PSO diberikan pada Tabel 3

**Tabel 3.** Parameter yang digunakan dalam simulasi numerik

No	Parameter	Simbol	Nilai
1	Tebakan awal parameter , metode Gauss Newton	, ,	Disesuaikan dataset
2	Kognitif swarm PSO	,	{1.2,1.82.4}
3	Jumlah swarm		{30,100,150}
4	Iterasi maksimum		1 3
5	Toleransi eror maksimum		1 - 5

Pertama, akan ditentukan parameter model eksponensial menggunakan metode analitik, Gauss Newton dan PSO dari data perbandingan suhu dan kelembaban pada atmosfer bumi [14] yang disajikan pada Tabel 4.

**Tabel 4.** Kelembaban udara berdasarkan ketinggian

C	-40	-30	-20	-10	0	5	10	15	20	25	30	35	40
H	0.1	0.3	0.75	2	3.5	5	7	10	14	20	26.5	35	47

Berdasarkan data yang diberikan, dengan menggunakan prosedur pada Algoritma 1 diperoleh matriks dan vektor yaitu

$$A = \begin{pmatrix} 80 & 13 \\ 8100 & 80 \end{pmatrix}, \quad r = \begin{pmatrix} 20.32703 \\ 693.5217 \end{pmatrix} \quad (19)$$

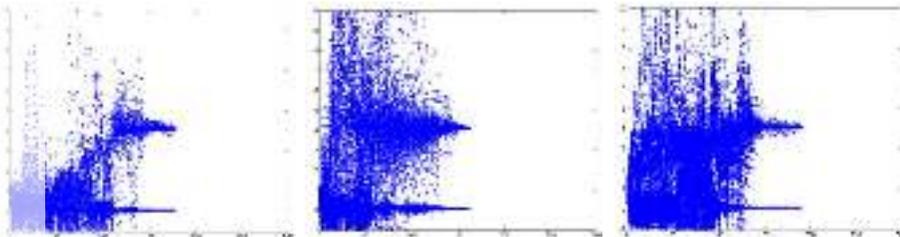
Sehingga karena determinan matriks pada persamaan (19) tidak nol maka terdapat solusi tunggal, yaitu  $= 0.747$ ,  $= 3.015$ . Untuk PSO akan digunakan tiga nilai swarm berbeda dengan  $= 30, 100, 150$ . Hasil simulasi selengkapnya, diberikan pada Tabel 5.



**Tabel 5.** Hasil penentuan parameter dari data Tabel 4 untuk model eksponensial dan erornya

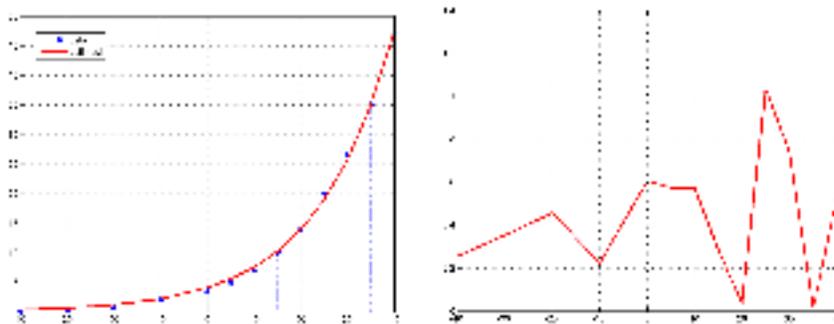
No	Metode	nS	itM	TOC	Eror	Relatif Eror
1	Analitik	-	-	-	0.074718 3.015647	25.22 14.736%
2	GN	0.3 0.2	-	100	2.57 4.103670	0.061240 2 1.169%
3	GN	0.5 5	-	100	2.56 0.5	3.75 2.43e129 142e127%
4	GN	5 5	-	100	2.57 5	3.75 2.4e131 142e129%
5	PSO	-	30	157	3.21 4.103666	0.061235 1.716426 1.003%
6	PSO	-	100	142	2.48 4.103668	0.061235 1.716426 1.003%
7	PSO	-	150	172	3.58 4.103676	0.061235 1.716426 1.003%

Dampak pada Tabel 5 bahwa algoritma PSO menghasilkan parameter yang membuat model eksponensial mendekati data yang diberikan dibandingkan metode analitik dan Gauss-Newton. Pada metode Gauss-Newton dapat perbedaan hasil yang diakibatkan pemilihan nilai awal yang berbeda-beda. Pemilihan nilai awal yang tidak tepat pada metode Gauss-Newton berakibat metode divergen atau tidak berhasil menemukan solusi. Pergerakan swarm dengan  $p = \{30,100,150\}$  dari titik awal yang dipilih secara acak menuju titik solusi akhir, diberikan pada Gambar 1.



**Gambar 1.** Pergerakan swarm dari posisi awal menuju titik parameter model eksponensial untuk  $p = \{50,100,150\}$  dari data Tabel 4.

Gambar 1 merupakan gambar posisi setiap swarm di setiap iterasi. Setiap swarm pada setiap iterasi akan menemukan posisi baru yang merupakan calon solusi. Pada akhirnya, seluruh swarm akan berkumpul pada titik yang sama dimana titik tersebut adalah solusi akhir yang merupakan parameter dari model eksponensial. Perbandingan antara data dan solusi numerik menggunakan parameter yang ditentukan dengan PSO serta erornya diberikan pada Gambar 2.



**Gambar 2.** Solusi numerik model eksponensial dan eror terhadap data Tabel 4.

Untuk model logistik, metode yang akan dibandingkan adalah metode analitik dan PSO. Dataset yang digunakan adalah data populasi Bison di daerah Yellowstone [15] yang disajikan pada Tabel 6.

**Tabel 6.** Data populasi Bison di daerah Yellowstone dari tahun 1902 sampai tahun 1931

No	tahun	Populasi	No	tahun	Populasi
1	1902	44	16	1917	397

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:

- a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
- b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.

2. Dilarang memperbanyak atau menyalin sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.





Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengemukakan dan memperbanyak atau menyebarkan seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.

No	tahun	Populasi	No	tahun	Populasi
2	1903	47	17	1918	423
3	1904	51	18	1919	504
4	1905	74	19	1920	501
5	1906	80	20	1921	602
6	1907	84	21	1922	647
7	1908	95	22	1923	748
8	1909	118	23	1924	808
9	1910	149	24	1925	830
10	1911	168	25	1926	931
11	1912	192	26	1927	1008
12	1913	215	27	1928	1057
13	1914	229	28	1929	1109
14	1915	270	29	1930	1124
15	1916	348	30	1931	1192

Berdasarkan data Tabel 6 dan menggunakan prosedur pada Algoritma 2 diperoleh matriks dan vektor

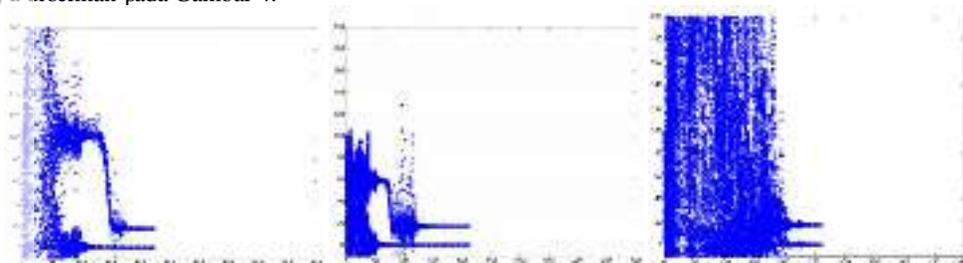
$$A = \begin{pmatrix} 57,495 & 30 \\ 110,191,415 & 57,495 \end{pmatrix}, \quad r = \begin{pmatrix} 209,276 \\ 40,1776,3 \end{pmatrix} \quad (20)$$

Selanjutnya, hasil perbandingan parameter dari data Tabel 6 untuk model logistik dengan membandingkan antara metode analitik yang merupakan solusi SPL dari persamaan (20) dan algoritma PSO diberikan pada Tabel 7.

**Tabel 7.** Hasil penentuan parameter menggunakan metode analitik dan PSO serta erornya

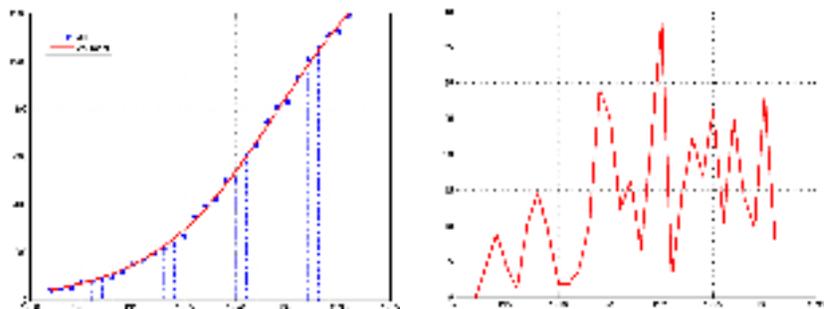
No	Metode	nS	itM	TOC		Error	Error Relatif	
1	Analitik	-	-	-	0.310833	0.000261	4014.949	28.59%
2	PSO	30	226	3.56	17.17955	0.011288	4017.628	28.61%
3	PSO	100	245	7.15	17.17955	0.011288	4017.628	28.61%
4	PSO	150	253	10.82	17.17955	0.011288	4017.628	28.61%

Tabel 7 menunjukkan bahwa algoritma PSO mendapatkan parameter yang membuat model logistik menghampiri data dengan tingkat error yang sangat kecil selisihnya (0.02%) dibandingkan metode analitik. Jika dilihat, metode analitik dan algoritma PSO menghasilkan nilai parameter yang jauh berbeda namun keduanya menghasilkan nilai fungsi yang hampir sama. Pergerakan swarm dengan  $p = \{30,100,150\}$  dari titik awal yang dipilih secara acak menuju titik solusi akhir, diberikan pada Gambar 3 sedangkan kurva perbandingan antara data dan solusi numerik menggunakan parameter yang ditentukan dengan PSO serta erornya diberikan pada Gambar 4.



**Gambar 3.** Pergerakan swarm dari posisi awal menuju titik parameter model logistik untuk  $p = \{30,100,150\}$  dari data Tabel 6.

Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:  
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.  
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.  
2. Dilarang menggunakan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.



Gambar 4. Solusi numerik model logistik dan erornya terhadap data Tabel 6 pada [1902,1931].

Data yang menggambarkan model epidemi SIR tidaklah mudah untuk ditemukan. Oleh karena itu, pada simulasi ini akan digunakan data simulasi yang dibuat menggunakan parameter yang telah ditentukan. Algoritma PSO digunakan untuk menebak kembali parameter berdasarkan data yang telah dibuat sebelumnya untuk melihat apakah eror yang dihasilkan untuk seluruh parameter di bawah toleransi maksimum, akan diuji dengan uji hipotesis menggunakan software R. Parameter model epidemi SIR yang digunakan diberikan pada tabel 8. Parameter ini dipilih secara acak pada interval (0,1). Data yang dibuat terdiri atas 100 buah data untuk masing-masing kompartmen yang terdefinisi pada interval [0,30].

Tabel 8. Parameter yang digunakan untuk membuat data model epidemi SIR.

No	No	No	No	No	No
1	0.9756	0.6774	11	0.4152	0.7281
2	0.1614	0.1245	12	0.1491	0.7248
3	0.7945	0.5955	13	0.4943	0.645
4	0.9244	0.7729	14	0.8487	0.08585
5	0.4663	0.5796	15	0.6778	0.5279
6	0.6136	0.6839	16	0.4459	0.8515
7	0.4105	0.4273	17	0.4971	0.21
8	0.9692	0.2768	18	0.1561	0.8267
9	0.6532	0.978	19	0.6979	0.2064
10	0.7714	0.9649	20	0.2047	0.4755

Hasil simulasi penentuan kembali parameter Tabel 8 menggunakan PSO disajikan pada Tabel 9.

Tabel 9. Hasil penentuan parameter SIR dengan PSO dan erornya

				itM		( )		( )	
0.9756	0.6774	0.95459	0.67289	1.62e-03	127	2.10e-02	2.15%	4.51e-03	0.67%
0.1614	0.1245	0.16097	0.12451	8.49e-05	125	4.33e-04	0.27%	1.42e-05	0.01%
0.7945	0.5955	0.77836	0.58998	7.73e-04	129	1.61e-02	2.03%	5.52e-03	0.93%
0.9244	0.7729	0.89617	0.75741	5.35e-04	143	2.82e-02	3.05%	1.55e-02	2.00%
0.4663	0.5796	0.45013	0.56176	9.97e-06	123	1.62e-02	3.47%	1.78e-02	3.08%
0.6136	0.6839	0.59115	0.66251	3.09e-05	132	2.25e-02	3.66%	2.14e-02	3.13%
0.4105	0.4273	0.40193	0.42014	1.09e-03	192	8.57e-03	2.09%	7.16e-03	1.68%
0.9692	0.2768	0.95882	0.28262	3.10e-02	137	1.04e-02	1.07%	5.82e-03	2.10%
0.6532	0.978	0.60877	0.91649	4.21e-06	144	4.44e-02	6.80%	6.15e-02	6.29%
0.7714	0.9649	0.72709	0.91538	1.90e-05	141	4.43e-02	5.74%	4.95e-02	5.13%
0.4152	0.7281	0.39123	0.68834	3.57e-05	162	2.40e-02	5.77%	3.98e-02	5.46%
0.1491	0.7248	0.13650	0.66395	5.14e-07	151	1.26e-02	8.45%	6.08e-02	8.40%
0.4943	0.645	0.47435	0.62158	7.99e-06	140	2.00e-02	4.04%	2.34e-02	3.63%
0.8487	0.08585	0.86256	0.08594	2.60e-02	179	1.39e-02	1.63%	8.66e-05	0.10%
0.6778	0.5279	0.66525	0.52294	4.69e-04	99	1.25e-02	1.85%	4.96e-03	0.94%
0.4459	0.8515	0.41431	0.79392	1.73e-06	140	3.16e-02	7.08%	5.76e-02	6.76%



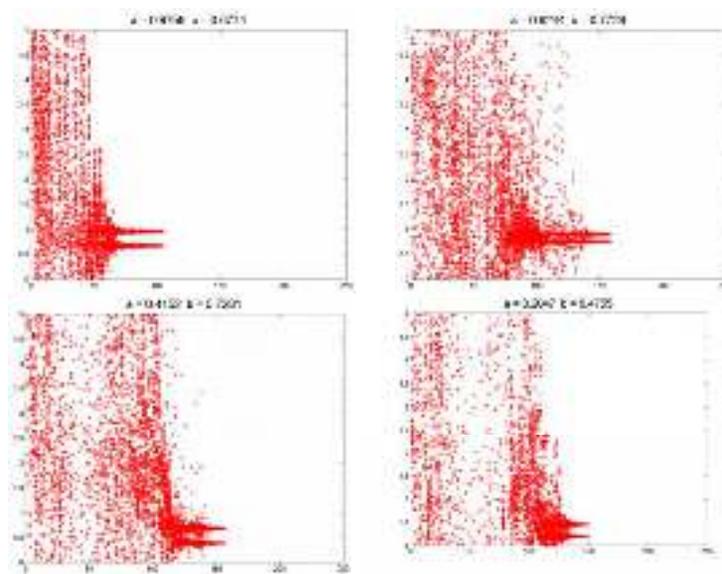


Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa persetujuan Universitas Riau.

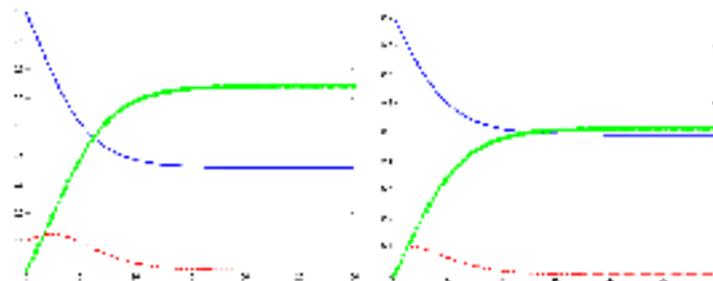
No	itM					( )	( )			
17	0.4971	0.21	0.49476	0.21253	5.99e-03	145	2.34e-03	0.47%	2.53e-03	1.21%
18	0.1561	0.8267	0.14093	0.74714	3.22e-07	118	1.52e-02	9.72%	7.96e-02	9.62%
19	0.6979	0.2064	0.69284	0.20934	1.98e-02	192	5.06e-03	0.72%	2.94e-03	1.43%
20	0.2047	0.4755	0.19547	0.45483	3.10e-06	154	9.23e-03	4.51%	2.07e-02	4.35%

Gambar 5 menunjukkan pergerakan swarm untuk parameter  $\{1,4,1,1,2,0\}$  dari titik posisi awal yang dipilih secara acak menuju titik solusi. Jumlah swarm yang digunakan dalam simulasi bagian ini adalah 30 swarm dengan memilih kognitif sosial dan individu pada nilai 1.8. Tampak pada Gambar 5 bahwa swarm tidak terus bergerak mencapai dikarenakan pada titik iterasi tertentu, kondisi berhenti pada Algoritma 3 telah dipenuhi.



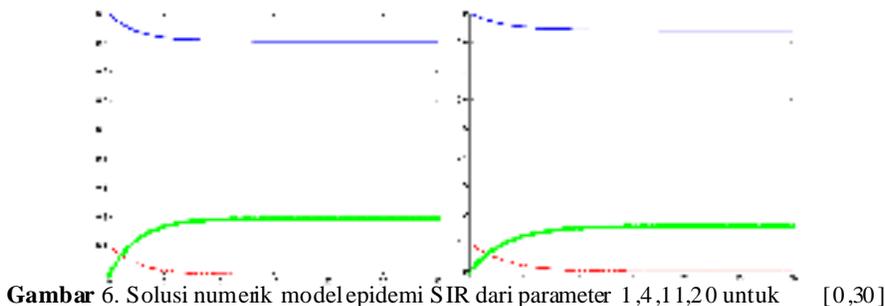
Gambar 5. Pergerakan swarm dari posisi awal menuju titik solusi dari parameter 1,4,1,1,2,0 untuk  $[0,30]$  yang ditentukan dengan  $\omega = 1.3$ .

Tampak pada Gambar 5 seluruh swarm berkumpul pada dua titik yang merupakan nilai parameter yang ingin ditentukan nilainya. Kurva solusi numerik model epidemi SIR menggunakan parameter hasil penentuan menggunakan PSO ditunjukkan pada Gambar 6.



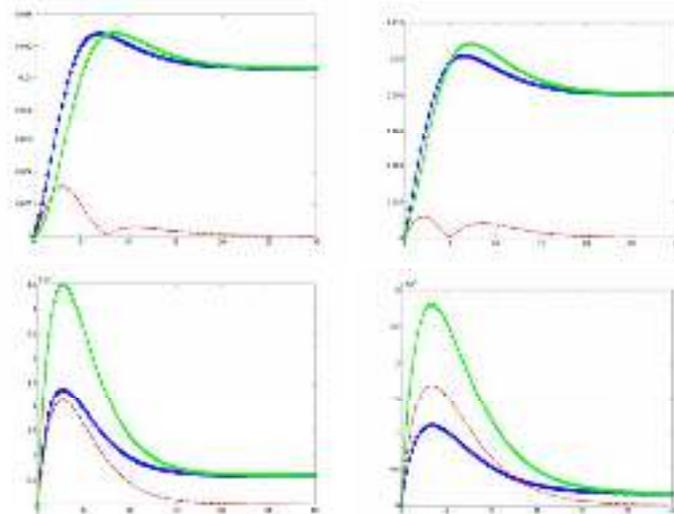
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.



Gambar 6. Solusi numerik model epidemi SIR dari parameter 1,4,1,1,2,0 untuk [0,30]

Kurva error antara data dan solusi numerik dari SIR dengan menggunakan parameter yang dihasilkan oleh PSO ditunjukkan pada Gambar 7.



Gambar 7. Error data dan solusi numerik model epidemi SIR dari parameter 1,4,1,1,2,0 untuk [0,30]

Tahap terakhir dari simulasi ini adalah menguji apakah relatif error yang dihasilkan dari parameter yang dihasilkan oleh PSO sesuai dengan yang diharapkan. Untuk keperluan tersebut, dibuat hipotesis statistik

- : Rata-rata error relatif parameter, pada Tabel 9 kurang dari sama dengan 3%
- : Rata-rata error relatif parameter, pada Tabel 9 besar dari 3%

Uji hipotesis dilakukan dengan t.test pada software R dengan memilih tingkat signifikansi 1%. Output dari uji tabel 9 dengan uji t menggunakan R ditunjukkan pada Gambar 8. Gambar 8 menunjukkan bahwa untuk tingkat signifikansi 1% dengan rata-rata uji 3% menghasilkan nilai  $t = \{0.1245, 0.2938\}$  yang berarti tidak menolak atau dengan kata lain, benar bahwa error relatif yang dihasilkan PSO untuk menentukan parameter, kurang dari atau sama dengan 3% dengan tingkat signifikansi 1%.

```

> t.test(x=parametri[, "beta"], y=parametri[, "gamma"], mu=0, conf.level = 0.01)
One Sample t-test

data: parametri
t = 1.1245, df = 19, p-value = 0.2713
alternative hypothesis: true mean is greater than 0
sample estimates:
mean of x
0.1245

> t.test(x=parametri[, "beta"], y=parametri[, "gamma"], mu=0, conf.level = 0.01)
One Sample t-test

data: parametri
t = 0.2938, df = 19, p-value = 0.7724
alternative hypothesis: true mean is greater than 0
sample estimates:
mean of x
0.2938
  
```

Gambar 8. Hasil t.test pada parameter, dari data relatif error pada Tabel xxx

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.



### Kesimpulan dan Future Works

Pada artikel ini telah dibahas tentang penentuan parameter pada model eksponensial, logistik dan model epidemi SIR menggunakan algoritma PSO. Model eksponensial dan logistik adalah model dasar yang dapat ditentukan solusi analitiknya. Berdasarkan simulasi, jelas tampak bahwa algoritma PSO memberikan hasil yang lebih baik dibandingkan metode analitik dan metode numerik Gauss-Newton. Untuk model SIR, data yang digunakan adalah data simulasi yang dihasilkan dari parameter yang telah diketahui nilainya. Hasil penentuan parameter menggunakan PSO menunjukkan bahwa algoritma PSO dapat menemukan parameter awal dengan tingkat eror yang sangat kecil. Berdasarkan uji hipotesis rata-rata, tampak bahwa eror relatif yang dihasilkan dari algoritma PSO terhadap penentuan parameter kurang dari 3% dengan tingkat signifikansi 1%. Pada simulasi penentuan parameter SIR, hanya digunakan satu pilihan parameter PSO. Hal ini dikarenakan kebutuhan simulasi yang berat dikarenakan harus menyelesaikan solusi numerik sistem persamaan diferensial untuk setiap swarm di seluruh iterasi. Untuk penelitian selanjutnya, perlu dipertimbangkan pengaruh jumlah swarm dan pemilihan kognitif swarm terhadap eror yang dihasilkan. Selain itu, dapat juga diterapkan adaptive PSO pada penelitian-penelitian yang telah dilakukan dalam hal kecepatan konvergensi swarm untuk penentuan parameter yang melibatkan SIR dan bentuk pengembangan SIR seperti SEIR dan SIRS.

### Ucapan Terima Kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada LPPM Universitas Riau atas bantuannya melalui dana DIPA penelitian Dosen Muda sehingga penelitian ini dapat terlaksana, juga kepada seluruh reviewer atas masukan dalam rangka perbaikan artikel ini.

### Pustaka

- [1]. Bratton, D., Kennedy, J., Defining a standard for particle swarm optimization. *Proceeding of the 2007 IEEE Swarm Intelligence Symposium*, (1-4244-0708-7/07), 2007.
- [2]. Bonyah, E., Okosun, K.O., Mathematical modeling of Zika virus, *Asian Pasific Journal of Tropical Disease*, 6(9):673-679, 2016
- [3]. Chiu, C.C., Cheng, Y.T., Chang, C.W., Comparison of particle swarm optimization and genetic algorithm for the path loss reduction in an urban area, *Journal of applied science and engineering*, Vol 15 No 4, 2012, pp. 371 - 380.
- [4]. Gbremeskel, A.A., Krogstad, H.E., Mathematical modeling of Endemic Malaria Transmission, *American Journal of Applied Mathematics*, 3(2):36-46, 2015.
- [5]. Hasni, A. Taibi, R., Draoui, B., Boulard, T., Optimization of greenhouse climate model parameters using particle swarm optimization and genetic algorithms, *ScienceDirect: Energy Procedia*, 6, 2011, 371-380.
- [6]. Jalilvand, A., Kimiyaghalam, A., Ashouri, A., Kord, H., Optimal tuning of PID controller parameters on a DC motor based on advanced particle swarm optimization algorithm, *International Journal on technical and physical problems of Engineering*, Vol 3 No 4 Issue 9, 2011, 10-17.
- [7]. Mu'tamar, K., Optimal control strategy for alcoholism model with two infected compartments, *IOSR Journal of Mathematics*, Vol 14 Issue 3 Ver. I 58-67.
- [8]. Mu'tamar, K., Naiborhu, J., Penentuan matriks pembobot pada kontrol optimal menggunakan adaptive particle swarm optimization, *Jurnal Aplikasi Teknologi Universitas Pasir Pengaraian*, Vol 8 No 1, 2016.
- [9]. Naiborhu, J., Firman, Mu'tamar, K., Particle swarm optimization in the exact linearization technic for output tracking of non-minimum phase nonlinear systems, *Applied Mathematical Sciences*, Vol. 7 No 109, 2013, 5427-5442.
- [10]. Osemwinyen, A.C., Diakhaby, A., Mathematical modelling of the transmission dynamics of Ebola virus, *Applied and Computational Mathematics*, 4(4):313-320, 2015.
- [11]. Sandhya, Kumar, D., Mathematical model for glucose-insulin regulatory system of diabetes mellitus, *Advances in Applied Mathematical Biosciences*, Vol 2 No 1, 2011.
- [12]. Shukla, J.B., Singh, G., Shukla, P., Tripathi, A., Modeling and analysis of the effects of antivirus software on an infected computer network, *Applied Mathematic and Computation*, 227(2014):11-18, 2014



#### Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.

Jurnal Sains Matematika dan Statistika, Vol. XXX, No. YYY, BULAN ZZZ 2018  
p-ISSN:2460-4542, e-ISSN: 2615-8663

- [13]. Solihin, M.I., Akmediawati, R., Partide swarm optimization for stabilizing controller of self-erecting linear inverted pendulum, *International Journal of Electrical and Electronic Systems Research*, Vol. 3, Juni 2010, 13-23.
- [14]. <http://resources.seattlecentral.edu/qelp/sets/026/026.html> (diakses tanggal 26 April 2018, 10.15 WIB)
- [15]. <http://resources.seattlecentral.edu/qelp/sets/066/066.html> (diakses tanggal 26 April 2018, 10.15 WIB)