PENDEKATAN PROGRAM LINEAR UNTUK PERSOALAN PEMOTONGAN BERAGAM UKURAN STOK[ξ]

M.D.H.Gamal* dan T.P. Nababan
Laboratorium Riset Operasi
Jurusan Matematika, FMIPA Universitas Riau

Abstract

This paper studies a linear programming approach of solving the cutting-stock problems in industries. In this paper, the standard stocks with various lengths is considered and to be cut into various smaller lengths to meet customer's demand. The objective function of this problem is to minimize the trim loss resulting in cutting the standard lengths, this is equivalent to minimizing the number of stocks used. Column generation method is used to obtain the optimal cutting patterns. Then a small example is presented by using Microsoft Excel as a computational tool.

Key words: *Column generation, cutting-stock, linear programming.*

PENDAHULUAN

Persoalan pemotongan stok muncul di beberapa industri, seperti industri kertas, kayu, kaca, baja, alumunium dan garmen. Pada industri kayu, permintaan dengan ukuran panjang yang berbeda dipenuhi dengan memotong beberapa batang panjang standar. Misalkan terdapat stok dengan panjang standar $L_1,\ L_2,\ \cdots, L_k$ yang akan dipotong untuk memenuhi permintaan. Stok dengan panjang $L_1,\ L_2,\ \cdots, L_k$ diasumsikan selalu tersedia sehingga permintaan sejumlah b_i batang panjang l_i, $i = 1,2,\ldots,m$, dapat dipenuhi selama $L_j \geq l_i$ untuk semua i dan j. Persoalannya adalah bagaimana cara memotong stok untuk

[ξ] Disajikan pada SEMIRATA XXIV BKS-PTN Bidang MIPA Wilayah Barat, Banjarmasin 9–10 Mei 2011.
* Korespondensi: Dr. M.D.H.Gamal, Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Riau, Kampus Bina Widya, Pekanbaru 28293. Tel / Fax : (0761) 63273. Email: mdhgamal@unri ac.id.

memenuhi permintaan sedemikian rupa sehingga sisa pemotongan dapat diusahakan sesedikit mungkin, ini ekivalen dengan stok digunakan sesedikit mungkin.

Suatu aktivitas diartikan sebagai cara memotong suatu panjang standar menurut pola tertentu. Sebagai contoh, memotong 10 batang stok panjang 7 *feet* menjadi 2 batang panjang 2 *feet* dan 1 batang panjang 3 *feet* dinamakan suatu aktivitas. Dengan memperkenalkan suatu variabel untuk setiap aktivitas yang mungkin dalam memotong panjang standar $L_1,\ L_2,\ \cdots, L_k$ menjadi panjang $l_1,\ l_2,\ \cdots, l_m$ yang diminta, persoalan pemotongan stok ini dapat dikategorikan sebagai persoalan program linear integer, dengan nilai suatu variabel menunjukkan berapa kali suatu aktivitas dilakukan. Variabel x_1, x_2, $\cdots, x_n$ yang menunjukkan aktivitas-aktivitas harus memenuhi m pertaksamaan:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i\ , \qquad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m$$

jika suatu pesanan sebanyak b_i batang panjang l_i akan dipenuhi, dengan a_{ij} adalah jumlah batang panjang l_i yang dihasilkan dari aktivitas j. Fungsi tujuannya adalah upaya meminimumkan sisa pemotongan, atau ekivalen dengan meminimumkan penggunaan stok $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$. Jadi bentuk umum persoalan pemotongan stok adalah

$$\begin{aligned}
&\text{min } z = x_1 + x_2 + \cdots + x_n \\
&\text{kendala } a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i\ ,\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad x_{ij} \geq 0 \text{ dan integer, } j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.
\end{aligned}$$

Ada dua faktor yang menyebabkan rumusan persoalan pemotongan stok ini tidak praktis [1]. Pertama, banyaknya n pola pemotongan bisa berukuran sangat besar jika banyaknya m pesanan berukuran besar. Faktor kedua adalah pembatasan terhadap bilangan bulat (*integer*). Pada kertas kerja ini dibahas teknik untuk mengatasi faktor yang pertama, banyaknya n pola pemotongan yang berukuran besar, dengan mengabaikan syarat kendala bilangan bulat. Kemudian solusi yang diperoleh, dibulatkan ke atas.

Gamal dan Zaiful Bahri dalam [2] melakukan pendekatan program linear untuk menyelesaikan persoalan pemotongan stok pola pemotongan satu dimensi dimana pola pemotongan dibangkitkan dengan menggunakan teknik pembangkit kolom dengan bantuan komputasi *LINDO*. Gamal, Senni, dan Nababan dalam [3] menyelesaikan persoalan pemotongan stok dari beberapa panjang standar dengan mengadopsi teknik yang digunakan oleh Dyckhoff [4] dan meyelesaikannya dengan paket *LINDO student's version.*

TEORI PROGRAM LINEAR

Pandang kembali model umum persoalan pemotongan stok. Model itu dapat ditulis dalam bentuk umum persoalan program linear integer sebagai:

$$\min\ z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \text{ dengan kendala } \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i,\ \ i=1,\ 2,\ \ldots,m \text{ dan } x_j \geq 0 \text{ dan integer}$$

dengan $c_j = 1$ untuk $j = 1, 2, ..., n$. Dalam bentuk matriks persoalan ini dapat ditulis

$$\min\ z=\mathbf{c}\,\mathbf{x} \text{ dengan kendala } \mathbf{Ax}\geq\mathbf{b} \text{ dan } \mathbf{x}\geq\mathbf{0} \text{ dan integer}$$

dengan **c** adalah vektor baris berdimensi n, **x** adalah vektor kolom berdimensi n, **b** vektor kolom berdimensi m, dan **A** matriks berordo $m \times n$. Dalam bentuk standar, bentuk terakhir ditulis sebagai

$$\min\ z=\mathbf{c_B x_B}+\mathbf{c_N x_N} \text{ dengan kendala } \mathbf{Bx_B}+\mathbf{Nx_N}=\mathbf{b} \text{ dan } \mathbf{x_B},\mathbf{x_N}\geq\mathbf{0} \text{ dan integer}$$

dengan $\mathbf{x_B}$ adalah variabel basis, $\mathbf{x_N}$ variabel tak basis, dan **B** dan **N** berturut-turut adalah kolom matriks yang berkorespondensi dengan variabel $\mathbf{x_B}$ dan $\mathbf{x_N}$.

Pada sebarang iterasi metode simplex, misalkan basis yang terkait didefinisikan oleh $\mathbf{B} = (\mathbf{A}_1, \ldots \mathbf{A}_i, \ldots \mathbf{A}_m)$ dengan $\mathbf{A}_i$ vektor kolom berdimensi m, $i = 1, 2, \ldots, m$. Misalkan $\mathbf{c_B}=(c_1,c_2,\ldots,c_m)$ adalah koefisien fungsi tujuan yang berkaitan dengan $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\ldots$, $\mathbf{A}_m$. Pola pemotongan j memberikan harapan untuk perbaikan solusi program linear jika nilai penciutannya (*reduced cost*) $z_j-c_j=\mathbf{c_B B^{-1} A}_j-c_j$ yang berkorespondensi bernilai positif untuk persoalan minimisasi, lihat [5] dan [6], dengan $\mathbf{A}_j = \left(a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj}\right)^T$ adalah vektor yang menunjukkan banyaknya potongan dengan panjang l_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, yang dihasilkan dari aktivitas j.

Sampai disini elemen $\mathbf{A}_j$ tidak diketahui; yaitu, pola pemotongan yang baru belum diketahui. Dari teori program linear, pola yang paling memberikan harapan adalah pola yang memberikan nilai $z_j - c_j$ terbesar diantara semua pola (tak basis) yang mungkin. Tetapi pada persoalan pemotongan stok berkala besar, yang melibatkan banyak variabel, menghitung nilai $z_j - c_j$ untuk semua variabel tak basis merupakan pekerjaan yang membosankan. Disinilah diperlukan teknik pembangkit kolom (*column generation technique*). Pada persoalan pemotongan stok, setiap kolom atau variabel menunjukkan sebuah pola pemotongan sebatang panjang standar L_k. Sebagaimana yang dinyatakan pada pendahuluan, sebuah variabel x_j dinyatakan oleh a_{1j}, a_{2j}, dan a_{3j} dengan a_{ij}, misalnya, adalah jumlah potongan berturut-turut dengan panjang 1,5 *feet*, 2 *feet*, dan 3 *feet* yang dihasilkan dari pemotongan panjang standar 7 *feet*. Sebagai contoh, x_j untuk suatu j dinyatakan oleh $a_{1j} = 0$, $a_{2j} = 2$, dan $a_{3j} = 1$, yaitu stok standar dipotong menjadi 0 batang panjang 1,5 *feet*, 2 batang panjang 2 *feet* dan 1 batang panjang 3 *feet* dengan sisa 0 *feet*. Jadi teknik pembangkit kolom adalah suatu teknik untuk memperoleh kolom yang dapat memberikan nilai $z_j - c_j$ terbaik (positif pada persoalan minimisasi). Ini ekivalen dengan menyelesaikan subpersoalan

$$\text{maks } w = \sum_{i=1}^{m} d_i \, a_{ij} - 1 \text{ dengan kendala } \sum_{i=1}^{m} l_i a_{ij} \leq L_k \text{ dan } y_i \geq 0 \text{ dan integer.}$$

karena $c_j = 1$ untuk semua j dengan koefisien d_i elemen ke i dari $\mathbf{c_B B}^{-1}$. Subpersoalan ini dinamakan persoalan *knapsack*; yaitu, persoalan program linear dengan sebuah kendala. Nilai d_i disebut juga nilai dual (*dual prices*), lihat [5] dan [6]. Tanpa meubah optimisasi, subpersoalan *knapsack* di atas untuk menghasil pola pemotongan yang baik dapat ditulis sebagai

$$\text{maks } w = \sum_{i=1}^{m} d_i \, a_{ij} \text{ dengan kendala } \sum_{i=1}^{m} l_i a_{ij} \le L_k \text{ dan } y_i \ge 0 \text{ dan integer.}$$

Pada bagian berikutnya akan ditunjukkan pemakaian metode pembangkit kolom ini melalui sebuah contoh.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Dari pembahasan bagian sebelumnya, teknik pembangkit kolom untuk menyelesaikan persoalan pemotongan stok dapat dilakukan dengan langkah-langkah berikut:

Langkah 1. Pilih stok yang lebih pendek kerena dengan ukuran stok yang lebih pendek harga lebih murah. Bentuk program linear awal yang memiliki *m* kendala dari model yang terdefinisikan secara utuh, tetapi dengan sejumlah kecil kolom yang didefinisikan untuk sebarang *m* pola pemotongan yang murni; yaitu, pola yang hanya menghasilkan satu jenis panjang saja.

Langkah 2. Selesaikan Persoalan Utama program linear yang dibentuk pada Langkah 1.

Langkah 3. Dengan nilai dual solusi kini, bentuk kolom (pola) yang menguntungkan; yaitu dengan menyelesaikan persoalan *knapsack*

$$\text{maks } w = \sum_{i=1}^{m} d_i \, a_{ij} \text{ dengan kendala } \sum_{i=1}^{m} l_i a_{ij} \le L_k \text{ dan } y_i \ge 0 \text{ dan integer.}$$

dengan a_{ij} adalah koefisien Persoalan Utama pada kolom $j \in J$ dan baris i untuk $i = 1, 2, \ldots, m$, dan d_i adalah harga dual baris i dari Persoalan Utama,.

Langkah 4. Tentukan kolom j yang baru sedemikian sehingga

$$d_1 \, a_{1j} + d_2 \, a_{2j} + \cdots + d_m a_{mj} \ge 1.$$

Jika tidak ada kolom sedemikian, kembali ke Langkah 3 dengan mengganti ukuran stok yang lebih pendek berikutnya..

Langkah 5. Selesaikan Persoalan Utama yang telah disisipkan kolom baru yang diperoleh dari Langkah 3.

Langkah 6. Kembali ke Langkah 3.

Contoh Misalkan ada permintaan 25 batang panjang 1,5 *feet*, 20 batang panjang 2 *feet*, dan 15 batang panjang 3 *feet*. Permintaan 3 ragam panjang ini akan dipenuhi dengan memotong stok berukuran 7 *feet* dan stok berukuran 9 *feet*. Pertimbangkan stok berukuran 7 *feet*. Untuk memulai teknik pembangkit kolom, pertimbangkan 3 pola pemotongan murni, yaitu

1. Potong panjang standar 7 *feet* menjadi 4 batang panjang 1,5 *feet* dan lebihnya merupakan sisa. Misalkan x_i = banyaknya stok standar yang dipotong mengikuti pola *i*. Maka untuk Pola 1, x_1, diperoleh $4x_1 \geq 25$.
2. Potong panjang standar 7 *fee* menjadi 3 batang panjang 2 *feet* dan lebihannya merupakan sisa. Untuk Pola 2, x_2, diperoleh $3x_2 \geq 20$.
3. Potong panjang standar 7 *feet* menjadi 2 batang panjang 3 *feet* dan lebihannya merupakan sisa. Untuk Pola 3, x_3, diperoleh $2x_3 \geq 15$.

Bentuk awal Persoalan Utama pada Langkah 1 di atas adalah

$$\begin{array}{llll} \text{Min} & z = x_1 + x_2 + x_3 & & \\ \text{Kendala} & 4x_1 & \geq 25 & \\ & 3x_2 & \geq 20 & \qquad (1) \\ & 2x_3 & \geq 15 & \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 & & \end{array}$$

Setelah diselesaikan dengan *Microsoft Excel Solver*, diperoleh solusi optimal program linear (1) dengan harga dual optimal $d_1 = 0.25$, $d_2 = 0.333333$, dan $d_3 = 0{,}5$. Lalu, untuk membangkitkan pola pemotongan yang baru, Pola 4, dibentuk persoalan *knapsack*

$$\max \quad z' = 0{,}25\,a_{14} + 0{,}333333\,a_{24} + 0.5\,a_{34}$$

$$\text{kendala} \quad 1{,}5\,a_{14} + 2\,a_{24} + 3\,a_{34} \le 7$$

$$a_{14},\, a_{24},\, a_{34} \ge 0 \text{ dan integer}$$

Setelah diselesaikan dengan *Microsoft Excel Solver*, diperoleh solusi optimal optimal $a_{14} = 0$, $a_{24} = 2$, dan $a_{34} = 1$ dengan $z' = 1{,}166667$. Kemudian, pola baru ini disisipkan ke Persoalan Utama (1).

$$\begin{array}{llr} \text{Min } z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & & \\ \text{Kendala } \quad 4x_1 \qquad\qquad\quad \ge 25 & & \\ \qquad\qquad 3x_2 \qquad + 2x_4 \ge 20 & & (2) \\ \qquad\qquad\quad 2x_3 + x_4 \ge 15 & & \\ \qquad\qquad x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4 \ge 0 & & \end{array}$$

Solusi optimal dual Persoalan Utama (2) adalah $d_1 = 0.25$, $d_2 = 0.25$, dan $d_3 = 0{,}5$. Untuk membangkitkan pola baru, Pola 5, dibentuk persoalan *knapsack*

$$\max \quad z' = 0{,}25\,a_{15} + 0{,}25\,a_{25} + 0.5\,a_{35}$$

$$\text{kendala} \quad 1{,}5\,a_{15} + 2\,a_{25} + 3\,a_{35} \le 7$$

$$a_{15},\, a_{25},\, a_{35} \ge 0 \text{ dan integer}$$

Yang mempunyai solusi optimal $a_{15} = 3$, $a_{25} = 1$, dan $a_{35} = 0$ dengan $z' = 1$. Nilai fungsi tujuan persoalan *knapsack* $z' = 1$ menunjukkan bahwa tidak ada pola baru yang bisa disisipkan pada Persoalan Utama (2). Pada tahap ini, ganti ukuran stok dengan panjang 9 *feet* pada persoalan *knapsack* yang terakhir di atas.

$$\max \quad z' = 0{,}25\,a_{15} + 0{,}25\,a_{25} + 0.5\,a_{35}$$

$$\text{kendala} \quad 1{,}5\,a_{15} + 2\,a_{25} + 3\,a_{35} \le 9$$

$$a_{15},\, a_{25},\, a_{35} \ge 0 \text{ dan integer}$$

Persoalan *knapsack* ini mempunyai solusi optimal $a_{15} = 0$, $a_{25} = 0$, dan $a_{35} = 3$ dengan $z' = 1{,}5$. Lalu solusi ini disisipkan pada Persoalan Utama (2)

$$
\begin{aligned}
&\text{Min } z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \\
&\text{Kendala } 4x_1 \geq 25 \\
&\quad 3x_2 + 2x_4 \geq 20 \\
&\quad 2x_3 + x_4 + 3x_5 \geq 15 \\
&\quad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{aligned} \qquad (3)
$$

Solusi optimal dual Persoalan Utama (3) adalah $d_1 = 0.25$, $d_2 = 0.333333$, dan $d_3 = 0{,}333333$ dengan $z' = 1{,}5$. Untuk membangkitkan pola baru, Pola 6, dibentuk persoalan *knapsack*

$$
\begin{aligned}
&\max \; z' = 0{,}25\,a_{16} + 0{,}25\,a_{26} + 0.5\,a_{36} \\
&\text{kendala } 1{,}5\,a_{16} + 2\,a_{26} + 3\,a_{36} \leq 9 \\
&\quad a_{16}, a_{26}, a_{36} \geq 0 \text{ dan integer}
\end{aligned}
$$

yang mempunyai solusi optimal $a_{16} = 2$, $a_{26} = 3$, dan $a_{36} = 0$ dengan $z' = 1{,}5$. Pola baru ini disisikan ke dalam Persoalan Utama (3).

$$
\begin{aligned}
&\text{Min } z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \\
&\text{Kendala } 4x_1 + 2x_6 \geq 25 \\
&\quad 3x_2 + 2x_4 + 3x_6 \geq 20 \\
&\quad 2x_3 + x_4 + 3x_5 \geq 15 \\
&\quad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0
\end{aligned} \qquad (4)
$$

Solusi optimal dual dari Persoalan Utama (4) adalah $d_1 = 0.25$, $d_2 = 0.166667$, dan $d_3 = 0{,}333333$. Persoalan knapsack untuk membangkitkan pola berikutnya, Pola 7, adalah

$$
\begin{aligned}
&\max \; z' = 0{,}25\,a_{17} + 0{,}166667\,a_{27} + 0.333333\,a_{37} \\
&\text{kendala } 1{,}5\,a_{17} + 2\,a_{27} + 3\,a_{37} \leq 9 \\
&\quad a_{17}, a_{27}, a_{37} \geq 0 \text{ dan integer}
\end{aligned}
$$

dengan solusi optimal $a_{17} = 6$, $a_{27} = 0$, dan $a_{37} = 0$ dengan $z' = 1{,}5$. Pola ini disisipkan ke dalam Persoalan Utama (4) sehingga diperoleh Persoalan Utama (5)

$$
\begin{aligned}
&\text{Min } z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \\
&\text{Kendala } 4x_1 + 2x_6 + 6x_7 \geq 25 \\
&3x_2 + 2x_4 + 3x_6 \geq 20 \\
&2x_3 + x_4 + 3x_5 \geq 15 \\
&x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0
\end{aligned} \tag{5}
$$

Persoalan Utama (5) mempunyai solusi optimal dual $d_1 = 0{,}166667$, $d_2 = 0{,}222222$, dan $d_3 = 0{,}333333$. Persoalan *knapsack* yang berkorespondensi adalah

$$\max \ z' = 0{,}166667\, a_{18} + 0{,}222222 a_{28} + 0.333333\, a_{38}$$

$$\text{kendala } 1{,}5\, a_{18} + 2\, a_{28} + 3\, a_{38} \leq 9$$

$$a_{18},\ a_{28},\ a_{38} \geq 0 \text{ dan integer}$$

Yang mempunyai solusi optimal $a_{18} = 0$, $a_{28} = 0$, dan $a_{38} = 3$ dengan $z' = 1$. Nilai fungsi tujuan persoalan *knapsack* $z' = 1$ menunjukkan bahwa tidak ada pola baru yang bisa disisipkan pada Persoalan Utama (5). Persoalan Utama (5) memberikan solusi optimal $x_5 = 5$, $x_6 = 6{,}666667$, dan $x_7 = 1{,}944444$. Solusi ini dibulatkan menjadi $x_5 = 5$, $x_6 = 7$, dan $x_7 = 2$. Jadi, cara pemotongan stok yang optimal untuk memenuhi permintaan 25 batang panjang 1,5 *feet*, 20 batang panjang 2 *feet*, dan 15 batang panjang 3 *feet* adalah dengan cara

1. memotong stok ukuran 9 *feet* menjadi 3 batang panjang 3 *feet* sebanyak 5 kali;
2. memotong stok ukuran 9 *feet* menjadi 2 batang panjang 1,5 *feet* dan 3 batang panjang 2 *feet* sebanyak 7 kali;
3. memotong stok ukuran 9 *feet* menjadi 6 batang panjang 1,5 *feet* sebanyak 2 kali.

KESIMPULAN

Persoalan pemotongan stok dapat diformulasikan ke dalam persoalan program linear. Kolom dari matriks pada ruas kiri program linear dibentuk oleh banyak pola yang mungkin dan baris matriks terdiri dari banyak jenis permintaan. Semakin beragam panjang permintaan semakin banyak pola yang dapat dibentuk dan semakin banyak pula kolom dari model program linear pemotongan stok. Teknik pembangkit kolom dapat digunakan untuk menghasilkan kolom, atau pola pemotongan, yang lebih baik.

Pada pembahasan telah ditunjukkan penggunaan metode pembangkit kolom ini dengan *Microsoft Excel* sebagai alat bantu komputasi. Seseorang bisa saja mendapatkan solusi optimal yang berbeda dari hasil yang diperoleh di sini karena solusi optimal persoalan pemotongan stok tidak tunggal (*unique*).

Untuk pekerjaan ke depan, persoalan ini bisa dikembangkan menjadi persoalan pemotongan stok yang pola pemotongannya mengikuti panjang dan lebar, atau pola pemotongan dua dimensi.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Gilmore, P.C., and R.E. Gomory. 1961. A Linear Programming Approach to the Cutting-Stock Problem. *Operations Research*: **9**, 849 - 859.

[2] Gamal, M.D.H., dan Zaiful Bahri. 2003. Pendekatan Program Linear untuk Persoalan Pemotongan Stok: Pola Pemotongan Satu Dimensi. *Jurnal Natur Indonesia,* **5**: 107 - 112.

[3] Gamal, M.D.H., Santi Senni, dan T.P. Nababan. 2004. Persoalan Pemotongan Multi-Stok. *Jurnal Pilar Sains,* FKIP Universitas Riau: **3**, 5 -11.

[4] Dyckhoff, H. 1982. A New Linear Programming Approach to the Cutting-Stock Problem. *Operations Research*: **29**, 1092 - 1104.

[5] Taha, H. A. 1975. *Integer Programming Theory: Applications and Computations,* Academic Press, New York.

[6] Taha, H. A. 1982. *Operations Research: An Introduction*, MacMillan Publishing Co., New York.

[7] Winston, W. L. 2004. *Operations Research: Applications and Algorithms.* International Student 4th Edition. Brooks/Cole–Thomson Learning. Belmont, USA.