Linierisasi Sistem Dinamik Dalam Bidang Datar

Firdaus, Asli Sirait, M. Natsir

Jurusan Matematika FMIPA UR
Email : **firdaus_ur@yahoo.co.id**

Abstrak: Pada makalah ilmiah ini dibahas tentang teori linierisasi suatu sistem persamaan diferensial non linier dari sistem dinamik berdasarkan aturan dan definisi terkait . Untuk sistem Linier 2 dimensi, $x \in R^2$, n=2, diperoleh linierisasi dari

$$x = f(x) : R^2 \to R^2 \text{ sebagai } \dot{x} = Ax \text{ yang mempunyai penyelesaian } x(t) = e^{At}x_o$$

Persamaan $c(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0,\ mempunyai\ penyelesaian\ \lambda = \frac{1}{2}[r \pm \sqrt{\Delta}]$ dengan r = Tra A , $\Delta = r^2 - 4\delta$ dan δ = det A . Beberapa kriteria perilaku penyelesaian yang mungkin tergantung pada tanda Δ yang tergambar pada struktur eigen dari sistem planar dalam ruang parameter .

Kata kunci : Teori linieritas, struktur eigen, bidang phase.

1. Pendahuluan

Kestabilan dari suatu sistem linier dinamik secara analiik merupakan penyelesaian kualitatif dari sistem tersebut. Pada penelitian ini akan dianalisa titik keseimbangan linierisasi lokal dari sistem non linier dengan beberapa pendekatan. Beberapa hal terkait dengan teori linierisasi secara umum dari ruang penyelesaian bersamaan dengan kestabilannya dan penyelesaian kualitatif .

Suatu sistem dinamik direpresentasikan dengan persamaan diferensial :

$x' = f(x)$; $U \subset R^n \to R^n$,

Sedangkan dalam sistem diskrit direpresentasikan dengan persamaan diferensi

$X_{i+1} = g(x_i)$, dituliskan sebagai C^r , dengan $r \geq 1$ dalam pemetaan $x \mapsto g(x)$

Jika f(x) merupakan C^r , dengan $r \geq 1$. maka penyelesaian melalui $\bar{x} \in R^n$ ada dan tunggal pada fungsi C^r , pemetaan g(x) dari C^r adalah terinverskan dan mempunyai $g^{-1}(x)$ dengan pemetaan satu-satu dan pada/onto (pemetaan diffeomorphisme) .

Linierisasi dari sistem dinamik dalam bidang datar mengkaji perilaku solusi dari sistem $\dot{x}$ = Ax dalam bidang datar , U $\subset R^2$ dengan menelaaah beberapa teorema terkait antara lain teorema linierisasi dari Hartman dan Grobman serta menganalisa struktur eigen dari sistem planar berdasarkan kriteria eigen value dari matriks A untuk beberapa kasus baik posisi dari eigen value tersebut maupun jenis kestabilan berdasarkan kriteria eigen value tersebut .

2. Permasalahan dan Perumusannya

Suatu sistem linier dalam dimensi 2 , $x \in R^2$, n = 2 , linierisasi dari $x' = f(x) : R^2 \to R^2$
sebagai $x' = Ax$, dengan syarat awal $x(0) = x_0$ mempunyai penyelesaian $x(t) = e^{At}x_0$ dan dengan transformasi $y(t) = e^{\Lambda t} y_0$ dengan $y = P^{-1}x$ serta J merupakan bentuk Jordan dari A ,

dengan J = diag ($\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$) , = Λ λ_i berbeda satu dengan lainnya sehingga diperoleh solusi sistem $x' = Ax$, dengan syarat awal $x(0) = x_0$ dalam bentuk :

$$x(t) = e^{At}x_0 = P e^{\Lambda t} P^{-1} x_0 .$$

Persamaan det (A - $\lambda I) = 0$, diperoleh $\lambda = \frac{1}{2}(r \pm \sqrt{\Delta})$, dengan r = tr A dan $\delta = \det A$ dan $\Delta = r^2 - 4\delta$

Metodologi yang dilakukan pada penelitian ini dengan menelaah perilaku solusi dari sistem linier x' = A x untuk beberapa kriteria eigen value dari A yang direpresentasikan pada struktur eigen pada sistem planar da ı struktur eigen value dalam ruang parameter .

3. Hasil dan Pembahasan

Beberapa definisi dan teorema yang terkait dengan teori linierisasi adalah :

1. Definisi 1 :

Ditentukan sistem persamaan diferensial orde n x' = f(x) ; U $\subset$ $R^n \to R^n$ [1]

Suatu titik x^* yang memenuhi $f(x^*) = 0$ dikatakan titik kritis atau titik tetap atau titik equilibrium . Suatu titik $\bar{x}$ dalam bidang phase dari persamaan (1) , bukan titik tetap , Jika $f(\bar{x}) \neq 0$ dan disebut titik reguler atau titik biasa .

2. Definisi 2 :

Suatu titik tetap dikatakan sederhana / simple jika sistem linierisasi Ax mempunyai eigen value yang tidak nol atau jika det A $\neq 0$.

3. Definisi 3 :

Suatu titik tetap sederhana dikatakan hyperbolik jika a dalam Linierisasi A x tidak mempunyai eigen value nol pada bahagian realnya

4. Teorema Hartman & Grobman :

Misalkan sistem dinamik non linier x' = f(x) dalam ; U $\subset$ $R^n \to R^n$ mempunyai himpunan titik tetap hiperbolik sederhana $\bar{x}$ pada titik asal 0 , Maka lingkungan U dari $\bar{x} \in R^n$ dari equilibriumnya , pahse portrait dari sistem non linier x' = Ax + Ψ (x) dan linierisasi dalam x' = Ax adalah equivalent .

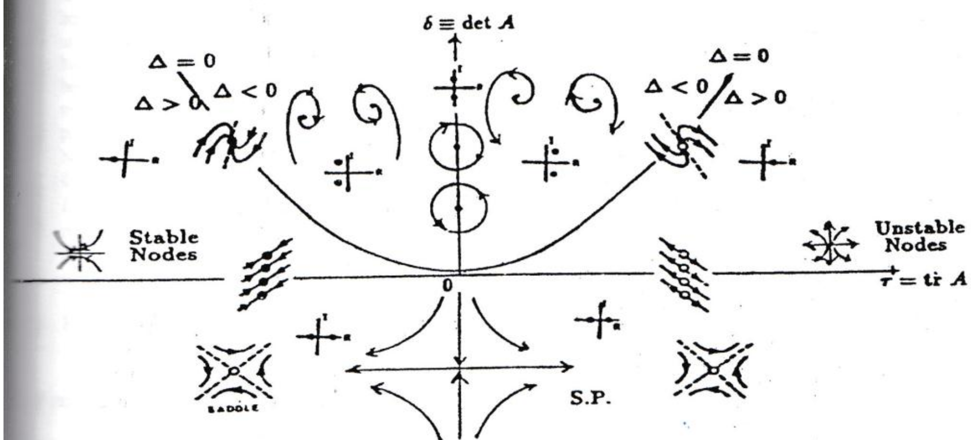
Untuk membedakan kasus hyperbolik dan non hyperbolik dapat dilihat pada tabel 1 berikut :

Tabel 1 . Struktur eigen dari sistem planar

Eigen value λ_1 , λ_2		Jenis Kestabilan
Titik Kritis Hyperbolik [Re $\lambda \propto 0$		
Kasus 1 : $\Delta > 0$	i. λ bernilai Real , tidak sama dan bertanda sama ii. λ bernilai Riel , tidak sama dan tanda berlawanan	i. Stable Node atau Unstabble Node ii. Sadle Point
Kasus 2 : $\Delta = 0$	$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = \frac{r}{2} < 0$	Improper atau Inflected Node
Kasus 3 : $\Delta < 0$	$\lambda = \alpha \pm i\beta \ ,\alpha \neq 0 \neq \beta$	Stable Focus atau Unstable Focus
Kritis Non hyperbolik [Re $\lambda = 0$		
Kasus 4 : $\Delta > 0$	$i. \lambda_i = 0 \neq \lambda_j [i \neq j] \to \delta = 0$ $atau\ \ \lambda = (0,.r)$ dimana $r > 0$ $ii. \lambda_1 = 0 = \lambda_2 \to \delta = 0 = r$	i. Single Degenerated ii. Double Degenerated
Kasus 5 : $\Delta = 0$		Double Degenerated

	$\lambda_1 = \lambda_2 = \dfrac{r}{2} = 0 \rightarrow r = 0$	
Kasus 6: $\Delta < 0$	$\lambda = \pm i\beta$, $r = 0 < \delta$ atau $\lambda = \alpha \pm i\beta$ dimana $\alpha = 0 < \beta$	Centre

Struktur eigen dari sistem dinamik dalam bidang datar dapat juga ditunjukkan dalam ruang parameter gambar 1 berikut



Gambar 1 . Struktur Eigen value dalam ruang parameter

Daftar Pustaka

Arnold , V , 1972 , *Bifurcations in Versal Families* , Russian Mathematical Surveys , 27 : 54 – 128

Arrow , KJ & L , Hurwicz , 1959 , *On the Stability of the Competitive Equilibrium* , Part I – II, . Econometrica 26 : 522-552

Arrowsmith , DK. & CM. Place , 1990, *An Introduction to Dinamical System*, Cambridge University Press, Cambridge

Pierce N.V.Tu , *Dinamical System , An Introduction with Aplications in Economics and Biology* . Second Revised and Enlarged Edition , Springer – Verlag