BAB IV. HASIL DAN PEMBAHASAN

Hasil pembahasan penelitian ini ini disusun sebagai berikut:

Pada bagian 4.1, Dianalisa tingkat bentuk pendekatan yang diterapkan untuk evolusi dengan kurvature rataan pada keseluruhan graph dalam R^{N+1} dan konstruksi solusi minimal dan maksimal pada [2.3] menjadi bentuk radial dan mulus dan dibuktikan dengan estimasi integral di bagian 4.2..

Bagian 4.3 dianalisa konstruksi solusi gradien eksternal yang membuktikan hasil perbandingan untuk [2.6] pada bentuk integral dan kemudian perumusannya dilakukan oleh **Neumann** dengan simetri radial yang digunakan dalam konstruksi ini.

Pada Bagian 4.4 dianalisaPreblem Newmann. ditambahkan beberapa catatan berkenaan dengan permasalahan stasioner .

Pada Bagian 4.5 menyimpulkan Bukti dan Perumusan Teorema 1 , Sedangkan aplikasi persamaan kurvature rataan dianalisa pada Bagian 4.6 dan 4.7 .

IV.1.Pendekatan Geometris Solusi Extremal .

Teorema 2.1.

Misal $u_0 \in C^{\infty}\{\Re^N\}$ *merupakan bentuk radia dengan (1.1) memiliki solusi maksimal (minimal secara berurutan)* $u^+ \in C\{\Re^N x\{0,+\infty\}\} \cap C\}\Re^N x[0,+\infty\}$ *, Maka (secara berurutan ,* $u^- \in C\{\Re^N x\{0,+\infty\}\} \cap C\}\Re^N x[0,+\infty\}$ *juga radial dalam x untuk* $t \geq 0$.

Untuk mempelajari persamaan kuasi linear pada (1.1) Pertama, diperkenalkan beberapa notasi. Pada basis resmi dari $\Re^{N+1}$, dengan menuliskan beberapa titik z dalam bentuk $z=(x,y)$ dimana $x-(z_1,z_2,...z_n) \in \Re^N$ and $y = z_{N+1} \in \Re$ oleh sumbu / aksis (O_y), dimaksudkan vektor garis yang membentang oleh adanya vektor terakhir dari basis.

Pendekatan geometris terdiri dari pencarian graph dari beberapa solusi pada [2.3] sebagai hiper-permukaan yang melibatkan (urutan waktu) dalam $\Re^{N+1}$. Evolusi geometris yang dihubungkan dengan [2.3] adalah pergerakan kurvture ratan (Pada hasil dan pembhasan Bagian 4.6). Sebuah cara alternatif untuk menjelaskan pergerakan ini adalah menggunakan metode level Metode level bentuk menerapkan pergerakan dari hiper-permukaan umum $\Gamma_\xi \subset R^N$

Disini, untuk penyederhanaan, kami membatasinya hanya pada graph gerak (motion graph). Misal u sebagai solusi dari (1.1) dengan data awal u_ε.

Bentuk $\Gamma_\varepsilon = \text{Graph}(u_\varepsilon)$ dan $\Omega_0^+ = \{(x,y) \in \Re^{N+1} : y > u_\varepsilon(x)\}$

Tinjau suatu fungsi kontinu seragam $u_0 : \Re^{N+1} \to \Re$ sedemikian hingga

$$\{u_0 = O\} = \Gamma_0 \{u_0 > 0\} = \Omega_0^+ \text{ and } \{u_0 < 0\} = \Re^{N+1} - \{\Omega_0^+ U \Gamma_0\}. \qquad [4.1]$$

dapat diperlihatkan untuk suatu fungsi $u : \Re^{N+1} x\{0,+\infty\} \to \Re$ sedemikian hingga untuk untuk setiap $\{x,t\} \in \Re^N x(0,+\infty)$ setiap solusi U dari [2.3], $u(x,u(x,t),t) = 0$ dan $u(x,u_0(x),0) = 0$ dan berikutnya u mempunyai penyelesaian geometrical persamaan kurvature rataan

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + \frac{(D^2 uDu, Du)}{|Du|^2} = 0 \text{ in } \Re^{N+1} x(0,+\infty), \text{ dengan data awal } v(z,0) = v_0(z) \qquad [4.2]$$

untuk suatu $z = \in \Re^{N-1}$

Teori dari penyelesaian viscocity (2.2) merupakan penyelesaian terbaik dalam class fungsi kontinu seragam , Jika $u_0 \in UC(\Re^{N+1})$,

Maka terdapat suatu penyelesain tunggal viscocity $u \in UC(\Re^{N+1} x[0,+\infty)$

Berikutnya perumusan dasar dari himpunan tingkatan 0 dari $u\,(.,t)$ pad setiap waktu tyang bergàntung hanya pada $(\Gamma_0, \Omega_0^+) \geq 0$,

dimana $\Gamma_t := \{u,(.,t) = 0\}$, $\Omega_t^+ := \{u(.,t) > 0\}$ untuk semua $t \geq 0$

Himpunan $\bigcup_{t \geq 0} \Gamma_t x\{t\}$ disebut front and Γ_t merupakan front pada waktu t .

Generalissi evolusi dalam front ini dapat dibangun kesingularan atau interior dalam $\Re^{N+1} x[0,+\infty)$.

○ **Bukti Teorema 2.1.**

ıtuk suatu $(x,t)\in(\Re^{N+1}x[0,+\infty)$,

$(x,t)-\sup\{y\in\Re:(x,y)\in\Gamma_t\}$ dan $u^-(x,t)-\inf\{y\in\Re:(x,y)\in\Gamma_t\}$

aph dari u^+ merupakan batas bawah dari front graph dan u^- merupakn btas atas)

reguleran ditunjukan dengan u^+ dan u adalah radial yang ditunjukkan oleh Lemma 2.2

ikut :

- **Lemma 2.2**

salkan Ω_0^+ merupakan himpunan buka dari $\Re^{N+1}$ dengan btasan $\Gamma_0-\partial\Omega_0^+$ *dan* $A\in O_{N+1}$,

mana O_{N+1} merupakan group simetris dari $\Re^{N+1}$. Tinjau generalisasi evolusi dengan

rvature rataan

$)\geq 0($ pada $(\Gamma_t)\geq 0)$ *dari* $\Gamma_0($*pada* $A(\Gamma_0))$, Maka $\Gamma_t=A(\Gamma_t)$ *untuk semua* $t\geq 0$

karang , Jika u_0 radial, Maka Γ_0= Graph (u_0) adalah invariant dengan suatu rotasi A dari

nbu (Oy). Misalkan Γ_t dan $\overline{\Gamma_t}$, merupakan generalisasi evolusi dari Γ_t dan $A(\Gamma_0)$, Maka

$=\Gamma_0$ karena $A(\Gamma_0)=\Gamma_0$, sehingga $\overline{\Gamma_t}=A(\Gamma_0)$, dengan menggunakan lemma ini , dapat

impulkan bahwa Γ_t invariant dengan A. Jadi $u^+(.,t)$ dan $u^-(.,t)$ adalah radial.

- **Bukti Lemma 2.2.**

gunakan Metode tingkatan himpunan

Tinjau $u_0UC(\Re^{N+1})$ sedemikian hingga (2.1) dipenuhi dan misalkan u merupakan solusi cosity seragam yang tunggal dari (2.2) dengan data awal v_0; ,Maka denganb menggunakan inisi sebelumnya diperoleh $\Gamma_t=\{v(.,t)=0\}$

jau $u_0(z):=u_0(A^Tz)$ untuk suatu $z\in\Re^{N+1}$ yang memenuhi hubungan

$x,y)-0\Leftrightarrow(x,y)\in A(\Gamma_0)$ dan $\overline{u_0}(x,y)>0\Leftrightarrow(x,y)\in A(\Omega_0^+)$.Selanjutnya $\overline{\Gamma}=\{\overline{u}(.,t)=0\}$,

nana $\overline{u}$ merupakan solusi viscosity yang tunggal dari (2.2) dengan data awal $\overline{u}$.

rjau $w(z,t)=u(A^T z,t)$ untuk setiap $(z,t)\in(\Re^{N+1}x[0,+\infty)$ yang dipenuhi oleh

$$\frac{u}{t}-Tr\left[A\left(I-\frac{(A^T Dw)\otimes(A^T Dw)}{|A^T Dw|^2}\right)A^T D^2 w\right]=0 \text{ dalam } (\Re^{N+1}x[0,+\infty)$$

ntuk suatu $\xi\in\Re^{N+1}$, karena A merupakan suatu isometric, dipero;eh

$$\langle(A^T Dw)\otimes(A^T Dw)A^T\xi,\xi\rangle-\langle(A^T Dw)\otimes(A^T Dw)A^T\xi,A^T\xi\rangle-\langle A^T Dw,A^{T\xi}\rangle^2$$

$$\langle Dw,\xi\rangle^2=\langle(Dw\otimes Dw)\xi,\xi\rangle$$

membuktikan ketunggalan solusi [2.4] dengan data awal $w(z,0)=u_0(A^T z)=\overline{u_0}$. dalam UC,

ng dipenuhi oleh $w=\overline{u}$, sehingga

$$=\{w(.,t)=0\}=\{z\in\Re^{N+1}:u(A^T z,t)=0\}=A(\Gamma_t),$$

1 ini merupakan kelengkapan bukti tersebut □

- **Proposition 2.3**

salkan teorema 1.1 dipenuhi oleh suatu data awal radial $u_0\in C^1(\Re^N)$. Maka ini juga

enuhi juga untuk data awal radial $u_0\in C^1(\Re^N)$.

- **Bukti proposisi 2.3.**

jau $u_0\in C^1(\Re^N)$ merupakan radial dan untuk suatu $\varepsilon>0$, terdapat $u_0^\varepsilon\in C^1(\Re^N)$ sedemikian

gga $\|u_0-u_0^\varepsilon\|\infty,\Re^N\le\varepsilon/2$.

tatan ; Dapat dipilih u_0^ε merupakan suatu fungsi radial dan difinisikan $\overline{u_0^\varepsilon}=u_0^\varepsilon-\varepsilon/2$.,

ka $\underline{u_0^\varepsilon}\le u_0\le\overline{u_0^\varepsilon}$ dan $\|\overline{u_0^\varepsilon}-\underline{u_0^\varepsilon}\|\infty,\Re^N\le\varepsilon$

rena [2.3] hanya bergantung pada turunan penyelesaiannya , Maka diperoleh keunggalan

uk data awal $\overline{u_0^\varepsilon}$ dan $\underline{u_0^\varepsilon}$, yang memenuhi

$$=u^\varepsilon+\frac{\varepsilon}{2} \text{ and } \underline{u^\varepsilon}=u^\varepsilon-\frac{\varepsilon}{2}$$

Sehingga

$$\left\|\overline{u^{\varepsilon}} - \underline{u^{\varepsilon}}\right\| \infty, \Re^{N} x[0,+\infty) \leq \varepsilon \qquad [4.3]$$

Tetapi karena ketunggalan harus dipenuhi oleh $\underline{u_0^{\varepsilon}}$ dan $\overline{u_0^{\varepsilon}}$ dan $\underline{u_0^{\varepsilon}} \leq u_0 \leq \overline{u_0^{\varepsilon}}$, Berikutnya dari bentuk pendekatan geometrical dan dengan generalisasi evolusi Γ_t dari Graph (u_0) sedemikian hingga.

$$\Gamma_t \subset \left\{(x,y) \in \Re^{N+1} : \underline{u^{\varepsilon}}(x,t) \leq y \leq \overline{u^{\varepsilon}}(x,t)\right\}$$

dan memenuhi

$$\left|u^{+} - u^{-}\right\| \infty, \Re^{N} x[0,+\infty) \leq \infty$$

IV.2..Suatu Estimasi Integral .

Let us first introduce some notations: we define $\varphi^{\pm}$ by $u^{\pm}(|x|,t)$ and set, for $r_0 \geq 1$ and every $(r,t) \in [r_0,+\infty)x[0,+\infty)$,

$$\psi^{\pm}(r,t) = \int_{r_0}^{r} \varphi^{\pm}(\rho,t)d\rho \text{ and } \psi = \psi^{+} - \psi^{-}$$

Then the following integral estimate holds.

- **Lemma 3.1**

Misalkan $T > 0$. Terdapat suatu konstanta positip $C = C(T)$ sedemikian hingga untuk suatu $r \geq r_0$ dan $t \in [0,T]$ *diperoleh.*

$$\psi(r,t) = \int_{r_0}^{r} (\varphi^{+} - \varphi^{-})(\rho,t)d\rho \leq C$$

- **Bukti lemma 3.1.**

Karena φ^{+} dan φ^{-} dipenuhi oleh solusi [2.5] ,dengan mengintegralkan persamaan pada lemma di atas dan misalkan ψ^{+} and ψ^{-} yang merupakan solusi dari

$$\partial_t \phi - [\arctan \partial_r \phi(\rho,t)]_{r_0}^{r} - (N-1)\int_{r_0}^{r} \frac{\partial^2 \phi(\rho,t)}{\rho} d\rho = 0$$

Maka dengan menggunakan integral partial diperoleh :

$$\partial_t\phi - [\arctan\partial_r\phi(\rho,t)]_{r_0}^{r} - (N-1)\left[\frac{\partial_r\phi(\rho,t)}{\rho}\right]_{r_0}^{r} - (N-1)\int_{r_0}^{r}\frac{\partial^2\phi(\rho,t)}{\rho}d\rho = 0$$

Bagi persamaan dengan ψ^+ and ψ^-, diperoleh ψ yang memenuhi .

$$\partial_t\psi - (N-1)\left[\frac{\partial_r\psi(\rho,t)}{\rho}\right]_{r_0}^{r} - (N-1)\int_{r_0}^{r}\frac{\partial_r\psi(\rho,t)}{\rho^2}d\rho \le \pi$$

Dengan menggunakan $\partial_r\psi = \varphi^+ - \varphi^- \ge 0$ dan $\rho^2 \ge r_0^2 \ge 1$ dalm integral terakhir , Maka diperoleh untk suatu $r \ge r_0$.

$$\partial_t\psi - (N-1)\frac{\partial_r\psi}{r} - (N-1)\psi \le \pi$$

Pertukarkan ψ dalam $\overline{\psi} = c^{-(N-1)t}\psi$, diperoleh $\overline{\psi}$ yang memenuhi .

$$\partial_t\psi - (N-1)\frac{\partial_r\overline{\psi}}{r} \le \pi \text{ dalam } [r_0,+\infty)x[0,+\infty)$$

Untuk suatu T yang tetap (fixed) , T > 0, dan dengan menggunakan suatu "friendly giant" diperoleh suatu batasan pada $\overline{\psi}$. Ambil $R \ge 3 + (N-1)T, C = C(T) = \sup_{[0,T]}\left|\psi(\overline{r_0},\bullet)\right|$, dan misalkan $W(r,t) = \dfrac{1}{R-(N-1)t-r} + \pi e^{2t} + C$

Dengan perumusan langsung diperoleh $\partial_t W - (N-1)(\partial_r W)/r \ge \pi$, yang memenuhi kondisi/syarat urutan : $\overline{\psi}(\bullet,0) - 0 \le W(\bullet,0), \overline{\psi}(r_0,\bullet) \le W(r_0,\bullet)$ untuk suatu $t \in [0,T], W(r,t) \to +\infty$ untuk $r \to R-(N-1)t$. Selanjutnya

$\overline{\psi} \le W$ dalam $\{(r,t) \in [r_0,+\infty)x[0,T] : R-(N-1)t - r > 0\}$

Untuk $R \to +\infty$, diperoleh $\psi(r,t) \le (\pi e^{2T} + C(T))e^{(N-1)T}$, Sehingga lemma 3.1 terbukti □

IV.3. Konstruksi solusi dengan gradien eksternal .

Pada bagian ini konstruksi pada (7.1) denghan gradien eksternal , dengan membuktikan teorema berikut :

- **Teorem 4.1**

Untuk suatu data awal radial $u_0 \in C^1(\Re^N)$, *terdapat dua solusi radial mulus dari[2.3]* , $u^{9,+}(x,t) = \varphi^{9,+}(|x|,t)$ *dan* $u^{9,-}(x,t) = \varphi^{9,-}(|x|,t)$ *sedemikian hingga untuk suatu solusi radial mulus* $(u,t) := \varphi(|x|,t)$, *diperoleh*

$\partial_r \varphi^{9,-}(r,t) \le \partial_r \varphi(r,t) \le \partial_r \varphi^{9,+}(r,t)$ untuk setiap $(r,t) \in [0,+\infty)x[0,+\infty)$

Sebelum diberikan pembuktian teorema tersebut , akan dibahas suatu teorema pembanding untuk [2.6] dalam himpunan terbatas pada proposisi 4.2 berikut :

- **Proposisi 4.2**

Misalkan $\varepsilon \ge 0, R, T > 0$ dan $\psi_1, \psi_2 \in C^2((0,R)x(0,T)) \cap C([0,R]x[0,T])$ yang merupakan suatu super solusi dari (7,4) dalam *(0, R)x(0, T) sedemikian hingga*

$\psi_1(\bullet,0) \le \psi_2(\bullet,0)$ *pada* $[0,R]$

$\psi_1(t,R) \le \psi_2(t,R)$ *untuk* $t \in [0,T]$

$\psi_1(t,0) \le \psi_2(t,0) = 0$ *untuk* $t \in [0,T]$

Maka $\psi_1 \le \psi_2$ *pada* $[0,R]x[o,T]$.

- **Bukti Proposisi 4.2 .**

Dari definisi $\psi_1 dan \psi_2, diperoleh$

$P_\varepsilon(\psi_1) \le 0 \le P_\varepsilon(\psi_2)$ pada $(0,\mathrm{R})x(0,t)$

Maka untuk $\rho > 0$ dan $0 < \tau < \mathrm{t}$ dn misalkan suatu fungsi non negatif $\chi \in C^2([\rho, R-\rho]x(0,\tau))$, *sehingga* $\int_0^\tau \int_p^{R-p} (P_\varepsilon(\psi_1) - P_\varepsilon(\psi_2))(r,t)x(r,t)drdt \le 0$

Gunakan integral partial pada $[0,\tau]x[\rho, R-\rho]$ diperoleh

$$\int_{\rho}^{R-\rho}(\psi_1-\psi_2)x(r,\tau)dr \le \int_0^{\tau}\int_{\rho}^{R-\rho}(\psi_1-\psi_2)\left(\partial_t\chi+(r,t)\partial_{rr}\chi-\frac{(N-1)(1+\varepsilon)}{r}\right)drdt+B\varepsilon(\rho,t)$$

dimana $A_{\varepsilon}(r,t)$ didefinisikan oleh

$$A_{\varepsilon}(r,t)=\varepsilon+\begin{cases}\dfrac{\arctan\psi_1-\arctan\psi_2}{\psi_1-\psi_2}\\ \dfrac{1}{1+(\psi_1)^2}\end{cases}$$

dan $B_{\varepsilon}(\rho,\tau)$ memuat berbagai batasan suku-suku integral bagian :

$$B_{\varepsilon}=\int_{\rho}^{R-\rho}[(\psi_1-\psi_2)x(r,0)]dr-\int_0^{\tau}[(\arctan\psi_1-\arctan\psi_2)\partial_r\chi]_{\rho}^{R-\rho}dt+$$

$$\int_{\rho}^{\tau}[\partial_r(\arctan\psi_1-\arctan\psi_2)x]_{\rho}^{R-\rho}dt-(N-1)\int_0^{\tau}\left[\frac{\psi_1-\psi_2}{r}x\right]_{\rho}^{R-\rho}dt$$

Sehingga :

$$1+\varepsilon\ge A_{\varepsilon}(r,t)=\varepsilon+\int_0^1(\arctan)(\lambda\psi_1(r,t)+(1-\lambda)\psi_2(r,t))d\lambda$$

$$=\varepsilon+\int_0^1\frac{d\lambda}{1+(\lambda\psi_1(r,t)+(1-\lambda))\psi_2(r,t))^2}$$

$$\ge\varepsilon+\inf_{[\rho,R-\rho]x[0,\tau]}\left\{\frac{1}{1+\psi_2^2},\frac{1}{1+\psi_2^2}\right\}\ge\varepsilon+\mu$$

dimana $\mu=\mu(R)>0$ Selanjutnya koefisiem A_{ε} merupakan reguleritas dari $\psi_1$dan ψ_2

- **Lemma 4.3**

Suatu $\theta\in C_0([0,R])$ dan untuk suatu $\rho>0$ sedemikian hingga sup $p(\theta)\subset(\rho,R-\rho)$ terdapat suatu fungsi non negatif $\chi=\chi_{\varepsilon,\rho}\in C^2((\rho,R-\rho)x(0,\tau))\cap C^1([\rho,R-\rho]x[0,\tau])$ yang merupakan suatu solusi dari persamaan linier backward

$$\chi=\chi_{\varepsilon,\rho}\in C^2((\rho,R-\rho)\frac{(1+\varepsilon)\partial\chi}{r}\,pada\ (0,\tau))\cap C^1([\rho,R-\rho]x[0,\tau])$$

ng memenuhi syarat batas :

$x(*,\tau)-\theta$ pada $(\rho,\mathrm{R}-\rho)$

$\chi(R-\rho\bullet,)=\chi(\rho\bullet)=0$ pada $[0,\tau)$,

anjutnya terdapat konstanta positip C = (R,θ) (bebas dari ε) sedemikian hingga

$R\theta)\leq\partial_r x(R-\rho,t)\leq 0\leq\partial_r x(\rho,t)\leq C(R,\theta)$ untuk $t\in(0,\tau)$ [4.4]

tatan : Untuk suatu $x=x_{\varepsilon,\rho}$ diperoleh $\int_\rho^{R-\rho}(\psi_1-\psi_2)\chi(r,\tau)dr\leq B_\varepsilon(\rho,\tau)$

rena $\chi=0$ pada $r=\rho$ dan $r=R-\rho$, dengan batasan sisa suku-sukunya sebagai berikut :

$(\rho,\tau)=\int_\rho^{R-\rho}[(\psi_1-\psi_2)\chi(r,0)]dr+\int_0^\tau|(\arctan\psi_1-\arctan\psi_2)(.,t)\partial_r\chi(.,t)|_\rho^{R-\rho}dt..$

ibatnya $\psi_1(x,0)\leq\psi_2(x,0)$ dengan $\chi\geq 0$, Jadi batasan sukunya pada waktu t = 0 adalah non

sitip , Maka dapat digunakan batasan pada $\partial_r\chi$ pada $r=\rho$ dan $r=R-\rho$, diberikan oleh

$(\rho,\tau)\leq C(R,\theta)[\int|(\arctan\psi_1-\arctan\psi_2)|)^2(\rho,t)dt+\int_0^\tau(\arctan\psi_1-\arctan\psi_2)^+(R-\rho,t)dt]$

nana notasi f^+ adalah max *{f,0}* karena $x(r,\tau)=\theta(r)$, akan diperoleh estimasi

$^{-\rho}(\psi_1-\psi_2)(r,\tau)\theta(r)dr\leq C(R,\theta)\left[\max_{(0,\tau)}(\psi_1-\psi_2)+(\rho,t)+\max_{(0,\tau)}(\psi_1-\psi_2)+(R-\rho,t\right]$

karang ambil ρ menyusut/berkurang pada nol ,dan karena $\psi_1(0,t)=\psi_2(0,t)=0$ dan

$(R,)\leq\psi_2(R,)=0$ Sehingga dengan kekontinuan solusi pada batasan atas diperoleh

$^{-\rho}(\psi_1-\psi_2)(r,\tau)\theta(r)dr\leq 0$

ntuk suatu $\theta\in C_0([0,R,.])$ seperti di atas

- **Bukti lemma 4.3.**

ri definisi A_ε, diketahui bahwa $A_\varepsilon\in([\rho,R-\rho]x[0,\tau])$ dan $\inf_{[0,R]x[0,\tau]}A_\varepsilon(r,t)\geq\mu(R)>0$

ri prinsip maximum diperoleh $0\leq x\leq 1$ pada $([\rho,R-\rho]x[0,\tau])$

nbuktian estimasi gradien (7.8) dengan menggunkan argument barrier yang dimulai dengan

$x(R-\rho,.)$. Ambil $w(r,t)=C(R-\rho-r)(1-C(R-\rho-r))$ pada $(r,t)\in[\rho,R-\rho]x[0,\tau]$,

nana

$$\overline{C}=\overline{C}(R)=\frac{2(N-1)}{R\mu(R)},C-C(R,\theta)2\max\left\{2\overline{C}+1,\sup_{[\rho,R-\rho]}|\partial,\theta|\right\}. \qquad [4,5]$$

aim w merupakan suatu sub solusi kuat dari masalah lemma 4.3 dalam

$,R-\rho]x[0,\tau]$ dimana $R_0=R-\rho-1/(2\overline{C})$. Jadi

$v=0,\partial_r w=C(-1+2\overline{C(R-\rho-r)}),\partial_{rr}w=-2C\overline{C}$,

aingga $\partial_t w+A_\varepsilon w_{rr}-(N-1)(1+\varepsilon)\frac{\partial_r w}{r}\leq -2\mu(R)C\overline{C}+(N-1)(1+\varepsilon)\frac{C}{r}<0$,

rena dapat diasumsikan $\varepsilon\leq 1$ dan $R_0>R/2$.

karang diperiksa syarat batas pada $[R_0,R-\rho]x\{t=\tau\}$. Dengan teorema nilai rata-rata ,

eroleh ; Untuk suatu $r\in[R_0,R-\rho],\theta(\tau)-\theta(R-\rho)\leq\sup_{[\rho,R-\rho]}|\partial_r\theta|(R-\rho-r)$, serta dengan

nggunakan $\theta(R-\rho)=0$ dan dari (7.8) diperoleh

$$)\leq\frac{1}{2}C(R,\theta)(R-\rho-r)\leq C(R,\theta)(R-\rho-r)\left(1-\frac{1}{2}\right)$$

api karena $r\geq R_0=R-\rho-1/(2\tilde{C})$, $\tilde{C}(R-\rho-r)\leq\frac{1}{2}$;

ka $x(r,l)=\theta(r)\leq w(r,l)$ pada $[R_0,R-\rho]x\{l=\tau\}$

la $\{r-R-\rho\}x[0,\tau]$, $w(R-\rho,t)=0\geq x(R-\rho,t)$

ada $\{r=R_0\}x[0,\tau]$ diperoleh $w(R_0,t)=\frac{C}{2\tilde{C}}\geq\frac{2\tilde{C}+1}{2\tilde{C}}\geq 1\geq x(R_0,t)$

i klaim dapat dibuktikan $\square$

plikasi prinsip maksimum , misalkan $x(r,t) \le w(r,t)$ dalam $[R_0, R-\rho]x[0,\tau]$,dan berikutnya

$\ge x(R-\rho,t) - x(r,t) \ge w(R-\rho,t) - w(r,t)$

agi dengan $R-\rho-r$ dan misalkan $r \to R-\rho$, diperoleh batasn gradien ,

$\ge \partial_r x(R-\rho,t) \ge -C(R,\theta), t \in [0,\tau]$

Pembuktian dari estimasi untuk $\partial, \chi(\rho;)$ cukup dengan menunjukkan $v(r,t) = (\sup|\partial_r\theta| + 1)(r-\rho)$ yang merupakan sub solusi kuat dalam $[\upsilon, R-\rho]x[0,\tau]$, yang nemberikan konklusi pembagian oleh $r-\rho$ dan $r \to \rho$ yang melengkapi pembuktian eorema

V.4. Problem Newmann

Pada bagian ini, kami mempelajari persamaan (2.3) dalam batas domain , dimana kondisi Neumann, yang dibutuhkan untuk membuat solusi gradien ekstremal pada bagian berikutnya. ada sequel, R>1 yang merupakan angka real dan $B_{R(}())$ merupakan pusat diameter bola R pada =0. Untuk keraguan denotasi ini, kami memberikan denotasi untuk matriks (2.3) oleh

$$b(\rho) = I - \frac{p \otimes p}{1+|p|^2} \; for \quad p \in \Re^N$$

- **Proposisi 4.4**

Misalkan $\mu_0 \in C^1(B_R(0))$ merupakan suatu data awal radial. $T > 0 \quad dan \;\; K \in \Re$,. Maka rdapat sutu solusi radial $u \in C_2(B_R(0)x(0,T)) \cap C^1(B_R(0)x[0,T])$ *padamasalah berikut* ::

$$\begin{cases} \dfrac{\partial_u}{\partial_t} - T_r(b(Du)D^2u) = 0 & dalam \;\; B_R(0)X(0,+\infty), \\ \dfrac{\partial u}{\partial v}(x,t) = K & pada \;\; \{|x| = R\}X(0,\infty), \\ U,(x,0) = U_o(x) & dalam \;\; B_R(0)X\{t = 0\} \end{cases} \qquad [4.6]$$

- **Bukti Proposisi 4.4.**

ukti dari proposisi ini akan sesuai dari standar "*vanishing viscosity method*" . Dengan emperkenalkan perkiraan masalah, memperlihatkan beberapa perkiraan untuk solusi dan khirnya mengekstrak beberapa subsekuensi yang memenuhi solusi mulus dari permasalahan slinya.

✓ **Step 1.** Perkiraan masalah

ntuk $\varepsilon > 0$, dipenuhi oleh

$$\frac{\partial_u}{\partial_t} - \varepsilon\Delta u - Tr(b(D)D^2u) = 0 \quad inB_R(0)x(0+\infty)$$

$$\frac{\partial u}{\partial v}(x,t) = K \quad pada \ \{|x| = \Re\}x(0,+\infty) \qquad [4.7]$$

$$u(x,0) = u_o(x) \quad \text{dalam } B_R(0)x\{t=0\}$$

nalisis dari titik awal dirumuskan oleh lemma berikut :

- *Lemma 4.5 .*

Untuk suatu $\varepsilon > 0, K \in \Re$ dan $u_o \in C^1\left(\overline{B_R(0)}\right)$ *terdapat suatu solusi radial* $_\varepsilon$ *dari* (4.5) *yang mana x dalam* C^1 *pad btsn parabolik dan* $u_\varepsilon(x,t)$ *merupakan radian alam x untuk suatu* $t > 0$.

✓ **Step 2.** Estimasi seragam untuk u_ε

itunjukkan batasan seragam untuk keluarga/kumpulan $(u_\varepsilon)\varepsilon. > 0$ dan gradien nya , yang pada khirnya memperkenalkan suatu super solusi mulus dari bentuk :

$$V(x,t) = C_2|x|^2|C_1t|C_0,$$

imana $C_2, C1 \in \Re$ dan $C_0 = \sup \frac{}{B_R(0)}|u_0|$ dalam urutan pada $W(.,0) \geq u_\varepsilon(.,0)$.

arena $DW(x,t) = 2C_2x, D^2W = 2C_2I$, ini cukup dipilih $C_2 > K$ dalam urutan , sehingga iperoleh $\frac{\partial W}{\partial n} = 2C_2R > \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n} = K, \partial B_R(0)x[0,t]$, n $C_1 > 2NC_2$ pada W yang merupakan uper solusi kuat dari masalah tersebut , Permasalahan

aximum dari $u_\varepsilon - W$ pada $\overline{B_R}(0)x[o,t)$ merupakan pendekatan pada $t \to 0$ yang memenuhi

$\leq W \leq C_0|C_1T|C_2R^2\overline{B_R}(0)x[0,t)$

Untuk mengestimasi batas bawah dapat digunakan suatu sub solusi , denganmengambil

tasan L^∞ yang merupakan konstanta yang hanya bergantung pada on sup $_{\overline{B_R(0)}}|u_0|$ dan K)

ntuk membuktikan batasan gradien untuk suatu

> 0 yang dipenuhi oleh φ_ε dengan $u_\varepsilon(x,t) = \varphi_\varepsilon(|x,|t)$ dan $\psi_\varepsilon = \partial_r\varphi_\varepsilon$. Maka memenuhi

$(\psi_\varepsilon) = 0$

nbil C=$C(R, K)$: $= \max\left\{\sup_{\overline{B_R(0)}}|Du_0(x)||K|\right\}$, Maka dengan menggunakan perumusan

rbandingan dalam proposisi 4.2 diperoleh $|\psi_\varepsilon| \leq C$, Karena C merupakan solusi dari (2.3),

ng memberikan keterbatasan gradien seragam .

✓ **Step 3.** Ekstraksi dari sub barisan konvergen .

Batasan sebelumnya membuktikan persamaan-kontinuitas di dalam variabel-x. untuk enunjukkan persamaan-kontinuitas di dalam 1 variabel , ambil hubungan klasik antara ntinuitas ruang dan waktu untuk solusi persamaan parabolik. Dengan demikian (u_ε) adalah rsamaan-kontinuitas di dalam kesamaan batas. Sehingga dapat mengekstraksi subsekuensi

$_{\varepsilon n})$ secara lokal dan seragam pada beberapa $u \in C(\overline{B_R(0)}$ x [0,T]).

n dari equi-continuitynya , dapat di ekstraksi suatu sub barisan $\left(\varepsilon^u_n\right)$ yang konvergen

ragam lokal pada $u \in C\left(\overline{B_R(0)}x[o,t]\right)$

✓ **Step 4.** Limit fungsi u yang merupakan solusi dari [4.6.]

ntuk dapat membuktikan hasil ini, dapat dicatat pertama kali bahwa, dengan kesesuaian eseragaman lokal argumen standar memperlihatkan bahwa u adalah solusi viskositas dari [4.6] lanjutkan dengan menunjukkan bahwa, penggunaan gradien batas sebelumnya, kami enempatkan ulang persamaan di dalam [4.6] dengan keseragaman parabolis sedemikian hingga masih merupakan sebuah solusi persamaan baru.

Jika $\rho \in \Re^N, |\rho| \leq C$ and $\|.\|$ dan $\|.\|$ mendenotasikan norma Euclidean di dalam ruang S_N ari matrik simetris, kemudian kita mempunyai

$$(p)\| \geq \|I\| - \frac{\|p \otimes p\|}{1+|p|^2} \geq N - \frac{N|p|^2}{1+|p|^2} \geq \frac{N}{1+C} := \lambda > 0.$$

ta kemudian mendefinisikan $\phi : S_N^+ \to S_N^+ \phi(M) = \psi(\|M\|)M + (1-\psi)(\|M\|)\lambda I,$, dimana S_N^+ alah ruang matrik simetris positif dan $\psi : \Re_+ \to \Re_+$ adalah pelunakan fungsi non-penurunan mana 0 berada pada o dan 1 di dalam $[\lambda, +\infty]$ Penempatan matrik difusi b di dalam [4.6] oleh $= \phi \circ b \in C^\infty(\Re^N; S_N^+$ kami memperoleh bahwa persamaan baru ini adalah parabolis seragam. etapi, selama $|Du| \leq C$ oleh batas gradien sebelumnya, kami mendapatkan bahwa $Du_\varepsilon;|$=b(Du) dengan demikian u adalah solusi viskositas dari sebuah problem baru [4.6] ngan difusi a.

- **Lemma 4.7**

rdapat suatu solusi tunggal *viscosity dari maslh Newmann:*

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} - Tr[a(Du)D^2u] && = 0 && , \text{dalam } B_R(0)x(0,+\infty) \\
&\frac{\partial u}{\partial v}(x,t) && = f && , \text{pada } \{|x| = R\} \text{ x } (0,\infty) \\
&u(x,0) && = u_0(x) && \text{dalam } B_R(0)x\{t=0\}
\end{aligned}$$

imana a merupkan elliptik seragam , $u_0 \in C^1\left(\overline{B_R(0)}\right)$ dan $f \in C(\partial B_R(0) \times [0,T])$ Selanjutnya merupakan solusi dalam batasan atas C^1 .

arena ketunggalan solusi viscosity telah dipenuhi sebelumnya , Maka u haruslah merupakan olusi dari [4.7]

- **Proposisi 4.8**

erdapat suatu konsntnta $C = C\left(R, T\|uo\|C^1\left(B_{2R}(0)\right)\right)$ sedemikian hingga untuk suatu u dari [1

$$B_R\left(x_0^{\sup}\right)\times[0,T]^{|u|} B_R(x_0)\times[0,t]^{|Du|\leq C} \qquad [7.12]$$

- **Bukti Teorema 4.1.**

isalkan u merupakan suatu solusi radial dari [1.1] dengan data awal u_0. yang memenuhi eberapa langkah berikut ini :

- ✓ **Step 1**. Untuk R>1, dan misalkan $C = C\left(R, T\|u_0\|C_1\left(B_{2R(0)}\right)\right)$ merupakan suatu konstanta yang didefinisikan dalam proposisi (4.8) dan u_R suatu kontraksi yang bebas dari solusi u, dan memenuhi

$$\partial_r u \geq \partial_r u_R \text{ in } \overline{B_R}(0)\times[0,t) \qquad [4.8]$$

- ✓ **Step 2.** Misalkan R naik [increase] pada $+\infty$: dengan batas lokal (4.7), himpunan $(u_R)_{R\geq 1}$ merupakan batasan lokal seragm dalam C^1, dan lokal equi-continuous. Dapat diekstrak suatu sub barisan lokal seragam dalam $\Re^N \times [0,\infty]$, dan Lim u^{9-} diperoleh setelah ekstraksi .

- ✓ **Step 3.** Pada proses langkah ke 4 sebelumnya dari proposisi 4.4 , Limit u^{9-} dikembalikan menjadi suatu solusi viscosity dari (1.1) , Selanjutnya dengan batasan gradien semula dalam suatu bola tetap $B_{R0}(0)$, untuk $R \geq R$, Maka u_R merupakan solusi dari

$$\frac{\partial u}{\partial t} - Tr[a(Du)D^2u] = 0 \text{ in } \overline{B_R(0)} \times [0,t) \qquad [4.9]$$

dimana suatu matriks diffusi didefinisikan dalm pembuktian proposisi 4.4. Step 4

, Gunakan $C = C\left(R, T\|u_o\|_{C^1(B_{R_0}(x0))}\right)$, Maka , u^{9-} merupakan juga solusi viscosity dari

[4.9] dalam $B_{R_0}(0)x(0,+\infty)$ untuk suatu $R_0 \geq 1$, dengan lemma 4.7 , terdapat

u^{9-} dalam $R^N x(0,+\infty)$, Dan akhirnya untuk $R \to \infty$ sepanjang sub barisan

u^{9-} yang dipilih u^{9-} dari (4.8) , yakni : $\partial_r u \geq \partial_r u^9$, dalam $R^N x(0+\infty)$

tatan : Dengan menggunakan konstruksi , u^{9-} merupakn rdial yang merupakan konstruksi as dari solusi , sehingga u^{9-} adalah solusi yang mempunyai gradien minimum sepanjang usi radial ..

- ✓ **Step 4**. Dengan argumen dan analisa konstruksi dari gradien maksimum dalam solusi radial dan konsisten dalam penyelesian masalah Newmann dengan batasan data

K = $C\left(R, T\|u_0\|_{C^1(B_{R_0}(x0))}\right)$, yang merupakan perumusan langkah terakhir ..

5,. Bukti Perumusan Ketunggalan Teorema 1.1 .

ın diperoleh kesimpulan akhir dengan perumusan ketunggalan ::

kti Teorema 1.1.

ıgan definisi dari solusi minimal dan maksimal , cukup dibuktikan bahwa $u^+ \equiv u$

ıg merupakan ketunggalan dalam class solusi viscosity kontinu , Selanjutnya dari proposisi , dapat dimisalkan bahwa suatu fungsi radial u_0 adalah didalam $C^1(\Re^N)$ dan tanpa ıghilangkan ke umumannya , maka terdapat solusi radial eksternal u^{9+} and u^{9-}

- ✓ **Step** 1. Pertama , klaim bahwa $\varphi^{9,+} = \varphi^-$, dan misalkan terdapat $(\overline{r,t}) \in [0,+\infty)x[0,+\infty)$ sedemikian hingga

$$\varphi^{9+}(\bar{r},\bar{t}) - \varphi^{-}(\bar{r},\bar{t}) > \varepsilon \qquad [4.10]$$

ntuk suatu $\varepsilon > 0$,dengan menggunakan teorema 4.1 , diperoleh $\varphi^{9+}(\bar{r},\bar{t}) - \varphi^{-}(\bar{r},\bar{t}) > 0$ untuk

atu $r \geq \bar{r}$ terdapat $r_0 \geq 1$ sedemikian hingga memenuhi persamaan [4.10] untuk

$\bar{t}) \in [r_0, +\infty) x \{\bar{t}\}$

likasi dari lemma 3.1 dengan r_0 dan $T = \bar{t}$, kan diperoleh

$$^{\infty}(\varphi^{+} - \varphi -)(r,\bar{t})dr \geq \int_{r0}^{+\infty} (\varphi^{9+} - \varphi -)(r,\bar{t})dr \geq \int_{r0}^{+\infty} \varepsilon \, dr$$

ngan argumen yang sama , Maka dapt dibktikan bahwa $\varphi^{9+} = \varphi^{-}$

✓ **Step 2.** Misalkan untuk T yang tetap yng memenuhi $T > 0$ dan untuk suatu $c > 0$

berlaku $U_{C,T}(x,t) := u^{+}(x,t) u^{-}(x,t) - \dfrac{c}{(T-t)^2}$, untuk $x,t) \in \Re^N x[0,T)$

rikutnya dari step 1 diperoleh $U_{C,T}(x,t) := \varphi^{9-}(|x|,t) - \varphi^{9+}(|x|,t) - c/(T,-t)$ yang tidak naik [

n-increasing] pada $|x|$ dengan M = $\sup_{\Re^N x(0,T)} U_{C,T}$ merupakan suatu $(0,t_0)$ dengan

$\in [0,T]$ Jika $(t_0 > 0)$, diperoleh titik dalam maksimum yang memenuhi

$$\partial_t u^{+}(0,t_0) - \partial_t u\text{-}(0,t_0) - \frac{c}{(T-t)^2,} Du^{+}(0,t_0) = Du\text{-}[0,t_0)$$

dan $D^2 u^{+}(0,t_0) \leq D^2 u\text{-}(0,t_0)$, Dengan menggunakan persaman di atas diperoleh bentuk

$$\partial_t u - Tr(b(Du)D^2 u) = 0 \text{, Jadi } \frac{c}{(T-t)^2 = Tr[b(Du^{+})(D^2 u^{+} - D^2 u\text{-})] \leq 0}$$

Sehingga diperoleh kesimpulan yang kontradiksi

Berikutnya dari bentuk $t_0 = 0$ dengan $M < 0$; sehingga

$$u^{+}(x,t) - u\text{-}(x,t) \frac{c}{(T-t)} for(x,t) \in \Re^N x[0,t)$$, untuk sebarang T

/.6. Aplikasi Pada Masalah Stationer.

Perumusan pada (1.1) dapat diperoleh dengan masalah gabungan sttioner untuk persamaan liptik ..

$$-\Delta u+\frac{\langle D^2uDu,Du\rangle}{1+|Du|^2}+\lambda u=f \text{ in } \Re^N \qquad [4.11]$$

ersamaan lain dapat diaproksimasi pada persamaan parabolik dalam bentuk versi radial nyatakan dalam bentuk

$$-\frac{\partial_{rr}\varphi}{1+(\partial_r\varphi)^2}-(N-1)\frac{\partial_r\varphi}{r}+\lambda\varphi=f(r) \text{ in } (0,+\infty) \qquad [4.12]$$

mana $\lambda>0$ dn $f\in C(\Re^N)$ merupakan suatu fungsi radial yang teridntifikasi dengan btasan ada paruh waktu .

dibuktikan perumusan ketunggalan pada solusi radial dari [4.12]) dengan mengambil /art/kondisi pertambahan yang memenuhi dalam fungsi berikut :

$$' = \left\{\varphi\in C^2([0,+\infty)) : \varphi(r)e^{-\lambda r^2/2(N-1)} \xrightarrow[r\to+\infty]{} 0\right\}$$

ang dpat dirumuskan dalam teorema berikut:

- **Teorem 6.1** *Untuk $N>1$ dan sutu fungsiradial f, jika $\varphi_1\in C$ (respectively $\varphi_2\in C$.) merupakan suatu sub solusi { pada suatu super solusi] dari [4.12] , Maka* $\varphi_1\le\varphi_2$ in $[0,+\infty)$ *, khususnya persamaan 4.11] mempunyai suatu hampiran pada solusi radial dalam C ..*

elanjutnya perumusan ini dapat dioptimalkan dengan perolehan suatu contoh penyagga counter-example] pada ketunggalan solusipad titik pertambahan kritis ,

Tinjau $\varphi(r)=e^{\lambda r^2/2(N-1)}$, dan ditunjukkan bahwa φ merupakansuatu solusi klasik dari [4.12] ada $[0,+\infty)$ dengan

$$f(r) = -\frac{\frac{\lambda}{N-1}\left(\frac{\lambda r^2}{N-1}+1\right)e^{\lambda r^2/2(N-1)}}{1+\left(\frac{\lambda r}{N-1}\right)^2 e^{\lambda r^2/2(N-1)}}$$

ntuk lebih jelasnya bentuk $f \in BUC([0,+\infty)) \cap C^{\infty}([0,+\infty))$ dapat diperluas pada IR^N sebagai atufungsi radial mulus , yang diperoleh dari teori solui viscosity dari (4.11)

- **Lemma 6.2**

njau persamaan differensial parsial dalam bentuk

$$F(Du, D^2u) + \lambda u = f \quad \text{in } IR^N \qquad [4.13]$$

mana $\lambda > 0$ *merupakan suatu elliptik kontinu yang non liner dan* $f \in C(IR^N)$.*Misalkant* u_1 *espectively* u_2*) merupakan suatu sub solusi pada* C^2 *dari (7.18) , Maka terdapat* $\chi_0 \in IR^N$ *demikian hinggat* $u_1(x_0) > u_2(x_0)$. *Maka untuk semua l r >* $|x_0|$

$$\frac{\max}{(0)}\{u_1 - u_2\} = \frac{\max}{\partial B_r(0)}\{u_1 - u_2\}$$

usnya jika $u_1(x) = \varphi_1(|x|)$ *untuk* $u_2(x) = \varphi_2(|x|)$ *yang merupakan radial* $(\varphi_1 -)$,

laka $(\varphi_1 - \varphi_2)(r) \ge (\varphi_1 - \varphi_2)(s) > 0$ untuk semua $r \ge s \ge |x_0|$

- **Bukti Lemma 6.2**

isalkan $r \ge |x_0|$ dan tinjau

$$\frac{\max}{B_r(0)}\{u_1 - u_2\} \qquad [4.14]$$

ngan asumsi bernilai positip dan misalkan mempunyai maksimum pada x_1 sedemikian hingga $\le |x_1| < r$, Dalam kasus .

$$D(u_1 u_2)(x_1) = 0 \text{ dan } D^2(u_1 u_2)(x_1) \le 0 \qquad [4.15]$$

ituliskan dlam persamaan (7.18) untuk u_1 dan u_2 di x_1, dan dengan menggunakan [4.15] peroleh $\lambda(u_1(x_1) - u_2(x_1)) \le F(Du_2(x_1),(D^2u_2(x_1)) - F(Du_1(x_1),(D^2u_1(x_1)) \le 0$

$$f(r) = -\frac{\frac{\lambda}{N-1}\left(\frac{\lambda r^2}{N-1}+1\right)e^{\lambda r^2/2(N-1)}}{1+\left(\frac{\lambda r}{N-1}\right)^2 e^{\lambda r^2/2(N-1)}}$$

ntuk lebih jelasnya bentuk $f \in BUC([0,+\infty)) \cap C^{\infty}([0,+\infty))$ dapat diperluas pada IR^N sebagai atufungsi radial mulus , yang diperoleh dari teori solui viscosity dari (4.11)

- **Lemma 6.2**

njau persamaan differensial parsial dalam bentuk

$$F(Du, D^2u) + \lambda u = f \quad \text{in } IR^N \qquad [4.13]$$

nana $\lambda > 0$ *merupakan suatu elliptik kontinu yang non liner dan* $f \in C(IR^N)$*.Misalkant* u_1 *espectively* u_2*) merupakan suatu sub solusi pada* C^2 *dari (7.18) , Maka terdapat* $\chi_0 \in IR^N$ *demikian hinggat* $u_1(x_0) > u_2(x_0)$*. Maka untuk semua l* $r > |x_0|$

$$\frac{\text{ax}}{(0)}\{u_1 - u_2\} = \frac{\max}{\partial B_r(0)}\{u_1 - u_2\}$$

ususnya jika $u_1(x) = \varphi_1(|x|)$ *untuk* $u_2(x) = \varphi_2(|x|)$ *yang merupakan radial* $(\varphi_1 -)$,

laka $(\varphi_1 - \varphi_2)(r) \geq (\varphi_1 - \varphi_2)(s) > 0$ untuk semua $r \geq s \geq |x_0|$

- **Bukti Lemma 6.2**

isalkan $r \geq |x_0|$ dan tinjau

$$\frac{\max}{B_r(0)}\{u_1 - u_2\} \qquad [4.14]$$

ngan asumsi bernilai positip dan misalkan mempunyai maksimum pada x_1 sedemikian hingga $\leq |x_1| < r$, Dalam kasus .

$$D(u_1u_2)(x_1) = 0 \text{ dan } D^2(u_1u_2)(x_1) \leq 0 \qquad [4.15]$$

ituliskan dlam persamaan (7.18) untuk u_1 dan u_2 di x_1, dan dengan menggunakan [4.15] peroleh $\lambda(u_1(x_1) - u_2(x_1)) \leq F(Du_2(x_1),(D^2u_2(x_1)) - F(Du_1(x_1),(D^2u_1(x_1)) \leq 0$

'ang merupakn suatu kontrakdiksi .

embuktianhal maksimum dalam (7.19) adalah dengan perumusan $\partial B_r(0)$ dalam kasus khusus

adial untuk setiap $s \in [0,r)$ $0 < (\varphi_1 - \varphi_2)(s) \leq (\varphi_1 - \varphi_2)(r)$

'ang merupkn pembuktian akhir dari lemma . □

○ **Bukti Teorema 6.1.**

)igunakan argumen kontradiksi , Asumsikan terdpat $r_0 \geq 0$ sedemikian hingga

$$(\varphi_1 - \varphi_2)(r_0) = \varepsilon > 0 \qquad [4.16]$$

ari bentuk lemma 6.2 dapat dimisalkan bahwa r_0 merupakan suatu besaran yang akan dicari, .

mbil $r_0 > 0$ sedemikian hingga

$$\lambda r_0 - \frac{N-1}{r_0} > 0 \qquad [4.17]$$

'uliskan persamaan (4.17) untuk sub solusi φ_1 dan super solusi φ_2 pada sautu titikt $r \geq r_0$,

emudian bagi ketidaksaman dan integralkan pada $r_0 = r$ sehingga diperoleh

$$-(N-1)\int_{r_0}^{r} \frac{\partial_r(\varphi_1 - \varphi_2)(\sigma)}{\sigma} d\sigma + \lambda \int_{r_0}^{r} (\varphi_1 - \varphi_2)(\sigma) d\sigma \leq 2\pi$$

)efinisikan $\psi(r) = (\sigma_1 - \sigma_2)(r)/r$ dan gunakan integral bagian , sehingga diperoleh ,Untuk

etiap $r \geq r_0$ maka

$$-(N-1)\psi(r) + (N-1)\psi(r_0) + \int_{r_0}^{r} \psi(\sigma)\left(\lambda\sigma \frac{N-1}{\sigma}\right) d\sigma \leq 2\pi \qquad [4.18]$$

ntuk $r \geq r_0$, definisikan

$$H(r) = (N-1)\psi(r_0) - 2\pi + \int_{r_0}^{r} \psi(\sigma)\left(\lambda\sigma - \frac{N-1}{\sigma}\right) d\sigma$$

an misalkan

$$H(r) = (N-1)\psi(r_0) - 2\pi > 0 \qquad [4.19]$$

ari lemma 6,2 dan persamaan[4.16] diperoleh $\psi(\sigma)(\lambda\sigma-(N-1)/\sigma)>0$ untuk setiap $\sigma \geq r_0$.

aka diperoleh $H(r)>0$ untuk setiap $r \geq r_0$. Dari (7.23), diperoleh untuk setiap $r \geq r_0$

$$\text{maka} \qquad \frac{1}{N-1}H(r) \leq \psi(r) \qquad [4.20]$$

n kalikan dengan $\lambda r-(N-1)/r>0$, diperoleh

$$\frac{1}{N-1}H(r)\left(\lambda r-\frac{N-1}{r} \leq \psi(r)\left(\lambda r-\frac{N-1}{t}\right)=H^1(r)\right) \qquad [4.21]$$

tegralkan pertidaksaman diffensial biasa yangdiberikan pad [4.21], sehingga diperoleh

$$\psi(r) \geq \frac{K}{r}e^{\lambda r^2/2(N-1)}$$

ntuk suatu konstanta positip $K=K(r_0-N)$., dari (4.20) diperoleh

$$(\varphi_1-\varphi_2)(r) \geq \frac{K}{r}e^{\lambda r^2/2(N-1)}, \forall r \geq r_0,,$$

ang merupaknbentuk yang kontradiksi dengan r menuju $+\infty$, karena $\varphi_1,\varphi_2 \in C$

khirnya dengan mengadopsi/menyerap persaman (4.19), Untuk setiap $\geq r_0, \psi(r) \leq 2\pi/(N-1)$. Dan dari persamaan [4.20], diperoleh bentuk berikut :

$$\int_{r_0}^{r} c\psi(\sigma)d\sigma=\int_{r_0}^{r}(\varphi_1-\varphi_2)(\varphi)d\sigma$$

$$\leq 2\pi+(N-1)\varphi(r)-(N-1)\varphi(r_0)+\int_{r_0}^{r}\varphi(\sigma)\frac{N-1}{\sigma}d\sigma$$

$$\leq 4\pi+\int_{r_0}^{r}\frac{4C}{\sigma}d\sigma=4\pi+2\pi\,\text{In}\left(\frac{\text{r}}{\text{r}_0}\right)$$

etapi dengan menggunakan (4.16], diperoleh untuk setiap $r \geq r_0$

$$\varepsilon(r-r_0) \leq \int_{r_0}^{r}(\sigma_1-\sigma_2)(\sigma)d\sigma \leq 4\pi+2\pi\ \text{In}\left(\frac{r}{r_0}\right)$$

ang merupakan kontrakdiksi untuk r menuju $+\infty$, Sehingga dengan pengingkaran teorema erbukti . ||

IV.7. Aplikasi Pada Gerak Kurvature Rataan .

onsekwensi dari teorema 1.1 , Untuk suati evalusi dengan kurvature rataan dari suatu entire raph di gambarkan dalam teorema 7.1 berikut :

eorem 7.1

Misalkan $\Gamma_0 = \text{graph}\,(u_0)$ dimana $u_0 \in C(\Re^N)$ *merupakan suatu fungsi radial , Maka generalissi volusi dengan kurvature rataan* $(\Gamma_t, \Omega_t^+)t \geq 0\, of (\Gamma_t, \Omega_t^+)$ *diberikan oleh*

$$\Gamma_0 \text{ Graph } (u(.,t)) \text{dan } \Omega_t^+ = \{y > u(x,t)\} \text{untuk suatu } t \geq 0 \qquad [4.22]$$

mana $u \in C^\infty(\Re^N x(0,+\infty)) \cap C(\Re^N x(0,+\infty))$ *merupakan solusi viscosity kontinu yang tunggal ari (1.1) ,sehingga untuk* $(\Gamma_t)t \geq 0$ *tidak dapat membangun suatu titik dalam dan untuk* $t > 0$, ,

- **Bukti Teorema 7.1.**

rnyataan (7.1) adalah sangat jelas , karena dengan menggunakan teorema 1.1 fungsi u^+ dan yang didefinisikan dalam teorema 2.1 dipenuhi oleh

$= u^- = u = C^\infty(\Re^N x)(0,+\infty)) \cap C(\Re^N)(0,+\infty))$

Ditunjukkan bahwa evolusi Γ_t dengan kurvature rataan ,diperoleh pembuktian kecepatan rmal $V^{\Gamma_t}_{(x_0,t_0)}$ pada setiap $(x_0, u)(x_0,t_0)) \in \Gamma_{t0}, t_0 > 0$, adalah sama dengan $-div_{(x,y)}(n)(x_0,t_0)$, mana $n(x_0,t_0)$, merupakan titik $(x_0,u)(x_0,t_0)$,

isalkan $P(t) = (x(t), u(t)t))$, merupakan kurva mulus pada front sedemikian hingga $x(t_0) = x_0$.

$x_0,t_0) = Du(x_0,t_0) - 1) / \sqrt{1 + |Du(x_0,t_0)|^2}$, diperoleh kecepatan normal dari $P(t)$ at $t = t_0$:

$$V^{\Gamma_t}_{(x_0,t_0)} = \left\langle \frac{dP(t_0)}{dt}, n(x_0,t_0) \right\rangle = \frac{-\frac{\partial u}{\partial t}(x_0,t_0)}{\sqrt{1 + |Du(x_0,t_0)|^2}}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{1 + |Du(x_0,t_0)|^2}} Tr\left[\left(I - \frac{Du(x_0,t_0) \otimes Du(x_0,t_0)}{1 + |Du(x_0,t_0)|^2}\right) D^2 u(x_0,t_0)\right]$$

$$-div_x\left(\frac{Du}{\sqrt{1+|Du|^2}}\right)(x_0,t_0)$$

$$-div_{(x,y)}\left(\frac{(Du-1)}{\sqrt{1+|Du|^2}}\right)(x_0,u(x_0,t_0),t_0)$$

$$-div_{(x,y)}(n)(x_0,t_0)$$