BAB III

KETUNGGALAN SOLUSI PERIODIK PERSAMAAAN DIFFERENSIAL TUNDAAN

3.1 PERSAMAAN DIFFERENSIALTUNDAAN

Suatu persamaan differensial disebut Persamaan Differensial Tundaan (Differential Delay Equations), jika pada persamaan terdapat hubungan ketergantungan dari waktu sebelum dan waktu sekarang.

Sebagai contoh persamaan : $y''(t) = y(t - \pi)$ merupakan Persamaan Tundaan dengan T > 0.

Suatu contoh dari Persamaan Differensial Tundaan dapat diamati dapat diamati dari fenomena berikut :

Suatu larutan air garam yang mengalir kedalam sebuah tanki dengan jumlah 6 liter / menit dan mengalir keluar dengan jumlah 5 liter / menit. Tentukanlah konsentrasi dari larutan garam tersebut sebagai fungsi dari waktu.

Solusi : Karena perbedaan antara larutan yang mengalir kedalam dan keluar tanki sebesar (6 – 5) liter / menit, maka volume di dalam tanki setelah t menit adalah :

$$(5\,l / \text{menit})\left[\frac{x(t)}{1000+t} kg/l\right] = \frac{5x(t)}{1000+t}\, kg/menit$$

Output perubahan dari masalah awal yang diberikan pada fenomena tersebut dapat dimisalkan dalam persamaan :

$$\frac{dx}{dt} = 6 - \frac{5x}{1000+t}, \quad x(0) = 0 \quad \text{.......................................} (3.1.1)$$

Persamaan Differensial Linier (3.1.1) dapat diselesaikan dengan perluasan faktor integrasi :

$$\mu(t) = (1000 + t)^5,$$

sehingga diperoleh :

$$\frac{d}{dt}\left[(1000+t)^5 x\right] = 6\,(1000+t)^5$$

$$(1000+t)^5 x = (1000+t)^6 + c$$

$$x(t) = (1000+t) + c\,(1000+t)^{-5}$$

Dengan menggunakan menggunakan syarat awal x (0) = 0 diperoleh $c = -(1000)^6$

Jadi solusi (3.1.1) adalah :

$$x(t) = (1000+t) - (1000)^6 (1000+t)^{-5}$$

Sehingga konsentrasi larutan garam dalam tanki pada waktu t adalah :

$$\frac{x(t)}{1000+t} = 1 - (1000)^6 (1000+t)^{-6} \; kg/l \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3.1.2)$$

Konsentrasi yang diberikan dari persamaan (3.1.2) mendekati 1 kg / l untuk $t \to \infty$.

Bentuk Persamaan :

$$x'(t) = 6 - \frac{3}{500}\,x(t - t_0), \quad \text{dengan } x(t) = 0 \text{ untuk } t \in [-t_0, 0]$$

disebut Differensial Persamaan Tundaan dengan positip t_0 konstanta

Suatu Persamaan Differensial Linier Tundaan sederhana :

$$u'(t) = a\,u(t-b) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3.1.3)$$

dimana a dan b konstanta.

Persamaan (3.1.3) mempunyai solusi :

$u = c\, e^{st}$, untuk c konstanta ,

dan s memenuhi Persamaan Transendental:

$s = a\, e^{-bt}$

Solusi (3.1.3) untuk $t > 0$ dapat digunakan metode langkah-langkah (Method of Steps) dengan asumsi $u(t) = f(t)$ untuk $-b \le t \le 0$.

Untuk $0 \le t \le b$, persamaan (3.1.3) menjadi :

$u'(t) = a\, u(t - b) = a\, f(t - b)$.

Jadi $\quad u(t) = \int_0^t a\, f(v - b)\, dv + u(0)$

Dengan u (t) dalam [0, b] , prosedur dapat berulang sehingga.

$$u(t) = \int_0^t a\, u(v - b)\, dv + u(0).$$

Sedangkan untuk $b \le t \le 2b$, maka prosedur berlanjut tak terbatas.

Dengan menggunakan metode banyak langkah, persamaan pada masalah nilai awal :

$u'(t) = u(t - 1)$, $u(t) = 1$ dalam $[-1, 0]$ adalah :

$$u(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{[t - (k - 1)]^k}{k!}, \quad n - 1 \le t \le n$$ dengan n bilangan bulat non negatip.

3.2 KETUNGGALAN SOLUSI PERIODIK PERSAMAAN DIFFERENSIAL TUNDAAN

Suatu Persamaan Differensial Tundaan dapat dituliskan dalam bentuk :

$$x'(t) = -\mu\, x(t) - f(x, t-\alpha) \quad \dots\dots (3.2.1)$$

dimana $\mu \geq 0$ dan $\alpha > 0$ merupakan konstanta dan $f : R \to R$ merupakan fungsi kontinu yang memenuhi $f(0) = 0$.

Ketunggalan solusi persamaan (3.2.1) dapat diteliti dari orbit solusi periodik berorintasi lambat pada bidang phase $(x(t), x'(t))$.

Orbit-orbit (dalam R^2) sepanjang kurva tertutup sederhana mengelilingi titik O (lingkaran) pada bidang diatas. Dengan mengganti x dengan x/λ, persamaan (3.2.1) dapat dituliskan sebagai:

$$x'(t) = -\mu\, x(t) - \lambda\, f\left[\tfrac{1}{\lambda}\, x(t-\alpha)\right] \text{ dengan } \alpha > 0 \quad \dots\dots (3.2.2)$$

Ketunggalan solusi (3.2.2) dapat ditelusuri dari variasi orbit-orbit dari Solusi Periodik Berosilasi Lambat (SPOL) dengan λ dan α bertambah / naik (Increase).

Misalkan $T(\alpha, \lambda)$ merupakan orbit SPOL dari (3.2.2) dalam R^2 yang ditunjukkan dengan $\alpha_2 \leq \alpha_1 > 0$ dan $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$ sedemikian hingga $T(\alpha_2, \lambda_2)$ dan $T(\alpha_1, \lambda_1)$ ada, maka $T(\alpha_2, \lambda_2)$ berada dalam ekstensior $T(\alpha_1, \lambda_1)$.

Definisi 1 : Suatu solusi periodik x dari (3.2.1) dengan periodik q dikatakan solusi periodik berosilasi lambat (SPOL) jika terdapat $p > \alpha$ sedemikian hingga $2 - p > \alpha$ dan $x(t) > 0$ untuk $t \in (o, p)$ dan $x(t) < 0$ untuk $t \in (p, q)$ $\dots\dots$ (3.2.3)

Suatu statement (H) : misalkan $f(0) = 0$ dan asumsikan terdapat $a > 0$, $b > 0$ (berhingga atau tak hingga) sedemikian hingga :

(i) $f(x)$ adalah c' dan $f'(x) > 0$ untuk setiap $x \in (-a, b)$, $f' - \mu \geq 0$.

(ii) $h(x) = \dfrac{x f'(x)}{f(x)} \leq 1$, monoton turun dalam $x \in (a, b)$ dan monoton naik dalam $x \in (-a, 0)$.

Teorema 1 : Asumsikan (H) dipenuhi oleh $a > 0$ dan $b > 0$ dan definisikan

$\cos p = -(f'(0)|\mu)^{-1}$, $p \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ dan

$$\alpha_0 = \rho\, \mu^{-1}((f'(0)|\mu)^2 - 1)^{-1} \quad \text{.......................................} \quad (3.2.4)$$

dengan $\mu > 0$, maka untuk setiap $\alpha > \alpha_0$ terdapat satu SPOL dari (3.2.1) yang memenuhi $-a < x(t) < b$ untuk setiap t. Untuk $\alpha \geq \alpha_0$ tidak terdapat SPOL dari (3.2.1). Selanjutnya jika x merupakan SPOL dari (3.2.1) yang memenuhi $-a < x(t) < b$ untuk setiap t dan $T(\alpha) = \{x(t), x'(t) ; t \in R\}$ merupakan orbit dari x dalam R^2, maka T adalah kurva tertutup sederhana mengelilingi lingkaran dan $T(\alpha_1)$ adalah penutup (closure) dari exterior orbit $T(\alpha_2)$ dengan $\alpha_2 > \alpha_1$ sedemikian hingga $T(\alpha_1)$ dan $T(\alpha_2)$ ada.

Bukti Ketunggalan Teorema 1 :

Jika untuk beberapa $\alpha > 0$, tersapat dua SPOL yang berbeda x_1 dan x_2 dari (3.2.1) dan misalkan T_1 dan T_2 merupakan orbit dari x_1 dan x_2 dalam R^2, sedangkan T_1 dan T_2 merupakan kurva tertutup sederhana mengelilingi titik awal yang tidak identik. Terdapat $\rho > 1$ sedemikian hingga orbit dari $y_1 = px_1$ tidak didalam exterior orbit x_2 atau orbit dari y_2 px_2 tidak didalam exterior x_1 (atau keduanya).

Jadi y_1 dan x_2 atau y_2 dan x_1 merupakan SPOL dari (3.2.2) untuk $(\alpha, \lambda) = (\alpha, \rho)$ dan $(\alpha, 1)$.

Untuk ketidaktunggalan dari (H) terdapat suatu biperkasi Hopf dari SPOL pada (3.2.1) pada $\alpha = \alpha_0$.

Jadi terdapat suatu barisan $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ dengan $\alpha_n \to \alpha_0$ pada $n \to \infty$ dan SPOL y_n dari (3.2.1) untuk $\alpha = \alpha_n$ dengan sup $|y_n(t)| \to 0$ pada $n \to \infty$.

Misalkan terdapat SPOL $\bar{x}$ dari (3.2.1) untuk $\bar{\alpha} \in (0, x_0)$, sedangkan orbit $\bar{x}$ dalam R^2 merupakan kurva tertutup sederhana mengelilingi lingkaran , maka terdapat suatu bilangan positip m sedemikian hingga $\alpha_m > \bar{\alpha}$ dan orbit dari y_m adalah didalam interior dari orbit $\bar{x}$.

Jadi tidak terdapat SPOL dari (3.2.1) untuk $\alpha \in (0, \alpha_0)$. Akibat Teorema 1 dengan (H) yang memenuhi untuk suatu a > 0 dan b > 0, dengan asumsi $\mu = 1$, dan didefinisikan $F(x) = -f(x)$ untuk $-b < x < a$, dan asumsikan terdapat suatu sub interval $[-\bar{a}, \bar{b}]$ dari (-a, b) sedemikian hingga

$$\lim_{n \to +\infty} \sup F^n(I) \subseteq [-\bar{a}, \bar{b}]$$

untuk suatu sub interval kompak I dari (-a,b) dengan F^n merupakan iterasi dari F.

Jika x_0 terdefinisi pada (3.2.2), maka tidak terdapat SPOL dari (3.2.1) dengan α dalam $(0, \alpha_0)$ dan terdapat suatu solusi tunggal SPOL dari (3.2.1) untuk setiap

$\alpha > \alpha_0$ dan jika $\sigma(\alpha)$ $(\alpha > \alpha_2)$, merupakan orbit dari (3.2.1) dalam R^2 maka $T(\alpha_1)$ adalah penutup(closure) dari exterior orbit $T(\alpha_2)$ dimana $\alpha_2 > \alpha_1 > \alpha_0$.

Misalkan (H) dipenuhi oleh $a = b = +\infty$ dan f mempunyai batas bawah dan untuk $\mu = 0$ dan $\alpha_0 = -\pi / (2 f'(0))$ maka tidak terdapat SPOL dari (3.2.1) dengan α dalam $(0, \alpha_0)$ dan terdapat SPOL yang tunggal dari (3.2.1) untuk setiap $\alpha > 0$, sehingga jika $T(\alpha)$ $(\alpha > 0)$ merupakan orbit dari SPOL (3.2.1) dalam R^2, maka $T(\alpha_1)$ berada dalam exterior dari orbit $T(\alpha_2)$ dengan $\alpha_2 > \alpha_1 > 0$.

Suatu (H) yang dipenuhi oleh a dan b, jika x SPOL dari (3.2.1) dengan periode q dengan $x(t) \in (-a, b)$ untuk semua t, maka $y(t) = x'(t)$ berosilasi lambat dengan $t_2 - t_1 > \alpha$ dan $t_1 + q + t_2 > \alpha$.

Teorema 2 : Misalkan memnuhi (H) untuk beberapa $a > 0$, $b > 0$ dan misalkan x merupakan SPOL dari 93.2.20 untuk (α, λ) yang memenuhi $-\lambda a < x(t) < \lambda b$ untuk semua t dan misalkan $T(\alpha_1, \lambda_1)$ merupakan orbit dari x dalam R^2, jika $\alpha_2 \geq \alpha_1 > 0$ dan $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$, $T(\alpha_1, \lambda_1)$ dan $T(\alpha_2, \lambda_2)$ ada maka $T(\alpha_2, \lambda_2)$ berada dalam exterior dari $T(\alpha_1, \lambda_1)$.

Bukti : Untuk membuktikan Teorema 2 di atas ditunjukkan dengan kontradiksi.

Misalkan x_i $(i = 1,2)$ merupakan SPOL dari (3.2.2) yang berkoresponden dengan $T_1 = T(\alpha, \lambda)$, sedangkan orbit dari SPOL (3.2.2) dalam R^2 adalah kurva tertutup sederhana mengelilingi lingkaran, jika T_2 tidak semuanya didalam exterior T_1, maka terdapat bilangan $\rho \geq 1$, Sehingga $T_0 = \{(px_2(t), p\ \ _2(t) : t \in R\}$ adalah tidak didalam exterior T_1, dan misalkan $\lambda_0 = p\lambda_2$, $\alpha_0 = \alpha$ dan

$x_0(t) = p\ \ _2(t), t \in R$ .... (3.2.5)

Jadi x_0 adalah SPOL dari (3.2.2) untuk $(\alpha, \lambda) = (\alpha_0, \lambda_0)$ dan orbit dari x_0 adalah T_0 dan T_0 mempunyai suatu titik tangen $(x_0(t''), x'(t'')) = (x_1(t'), x'(t'))$...... (3.2.6)

Klaim : $x_0'(t'') = x_1''(t')$ dalam (3.2.6) tidak nol.

Bukti : Asumsikan $x_0'(t'') = x_1'(t') = 0$, maka $x_0(t') = (x_1(t) \neq 0$, dan dapat ditulis

$x_0(t'') = x_1(t') = c > 0$ .... (3.2.7)

dengan $x'(t) > 0$ untuk $t \in [t^i - \alpha, t^i]$; $i = 0, 1, ...$

Dari persamaan (3.2.2), (3.2.6) dan (3.2.7) diperoleh :

$x_1(t' - \alpha_1) = d_1 \leq x(t'' - \alpha_0) = d_0 \leq 0$ .... (3.2.8)

untuk $d_0, d_1 \in R$.

Misalkan besar $\Omega = \{x_1(t), x_1'(t)) ; t \in [t^i - \alpha_i, t^i]\}$; $i = 0, 1$ ...

dalam bidang phase R^2.

Misalkan Ω_0 dan Ω_1 merupakan setengah busur bahagian bawah dari Ω di R^2 dan Ω_0 di bawah Ω_1 sedangkan T_0 di luar T_1, maka Ω_1 dapat dinyatakan sebagai :

$\Omega_i = \{(x,\varphi)(x) ; x \in [d,c]\}$; $i = 0, 1, ...$ .... (3.2.9)

dengan $\varphi_i(x) = x_1'(t_i(x))$

dan $t_i(x)$ merupakan invers dari $x = x_i(t)$ untuk $t \in [t^i - \alpha_i, t^i]$

dan $\varphi_o(x) \geq \varphi_1(x) > 0$ ....(3.3.0)

untuk semua $t \in [d_i, c]$.

Karena $x_i(t)$ dipenuhi oleh persamaan differensial $x' = \varphi(x)$

untuk $t \in [t^i - \alpha_i, t^i]$.

Dari persamaan (3.2.10) :

$x_1(t' + t) = x_o(t'' + t)$ untuk semua $t \in [-\alpha, 0]$.

Dengan ketunggalan solusi persamaan (3.2.2) dan definisi SPOL, maka diperoleh :

$$x_1(t) = x_o(t) \text{ untuk setiap } t .$$

Konsekwensinya $(\alpha_1, \lambda_1) = (\alpha_o, \lambda_o)$ dan f non linier, maka hal ini kontradiksi dengan asumsi $\lambda_o \geq \lambda_2 \geq \lambda_1$.