B A B II

Ruang Metrik dan Ruang Metrik-n

Pada Bahagian ini akan diuraikan beberapa konsep dasar tentang ruang, ruang bernorma-2 beserta hubungannya dengan ruang hasil kali dalam-2 dan ruang bernorma-2 serta beberapa sifatnya serta kontruksi untuk ruang hasil kalam-2*k* yang dilengkapi dengan ruang bernorma-*n*.

2.1.Ruang Metrik dan Ruang Mentrik-2

Konsep dan sifat dari ruang metrik dan ruang bernorma banyak dibicarakan diberbagai buku analisis antara lain Royden (1968), Rudin (1987), dan Kreyszig (1978) yaitu sebagai berikut

Definisi 2.1.1. Misalkan X suatu himpunan tak kosong dan d suatu fungsi bernilai riil dengan domain $X \times X$ yang memenuhi syarat berikut

(a). $d(x,y) \geq 0$, untuk semua x, y $\in X$

(b). $d(x,y) = 0$, jika dan hanya jika $x = y$

(c). $d(x,y) = d(y,x)$, untuk semua $x,y \in X$

(d). $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$, untuk semua $x,y,z \in X$ (ketaksamaan segitiga)

Fungsi d dikatakan metrik untuk X dan pasangan terurut $(X;d)$ dikatakan ruang metrik.

Definisi 2.1.2. Misalkan X ruang vektor. Misalkan $\|\cdot\|$ fungsi bernilai riil yang memenuhi syarat berikut:

(a). $\|x\| \geq 0$, untuk semua $x \in X$

(b). $\|x\| = 0$, jika dan hanya jika $x = 0, x \in X$

(c). $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$, jika α skalar dan $x \in X$

(d). $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, untuk semua $x,y \in X$

Maka $\|\cdot\|$ dikatakan norma untuk X dan pasangan terurut $(X,\|\cdot\|)$ dikatakan ruang bernorma.

Misal X ruang bernorma. Definisikan metrik d dengan $d = d(x,y) = \|x - y\|$. Maka akan diperoleh bahwa d merupakan metrik pada X. Jadi untuk setiap ruang bernorma, pastilah merupakan ruang metrik. Selanjutnya $(X,\|\cdot\|)$ disebut ruang bernorma. Jika ruang bernorma tersebut lengkap maka disebut ruang Banach dan ruang bernorma dikatakan memenuhi sifat parallelogram jika $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$.

Definisi 2.1.3. Sebuah hasil kali dalam (Inner Product) pada ruang vektor riil X adalah fungsi yang mengasosiasikan bilangan riil $(\cdot,\cdot)$ dengan masing-masing pasangan vektor x dan y pada X sedemikian rupa sehingga aksioma-aksioma berikut dipenuhi untuk semua vektor x, y dan z di X dan juga untuk semua skalar k.

1. $(x, y) = (y, x)$ (aksioma simetri)
2. $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$ (aksioma penambahan)
3. $(kx, y) = k(x, y)$ (aksioma kehomogenan)
4. $(x, x) \geq 0$ dan $(x, x) = 0$ jika dan hanya jika $x = 0$ (aksioma kepositifan)

$(\cdot,\cdot)$ disebut hasil kali dalam dan $(X,(\cdot,\cdot))$ ruang hasil kali dalam.

Konsep dari ruang linear bernorma-2 telah diperkenalkan oleh Gahler [1965], dan telah dikembangkan oleh beberapa ahli matematika antara lain Ehret [1969] yang membahas ruang linear bernorma-2 dan White et all [1991] membahas koveks-2 sempurna dan konveks sempurna. Cho et all [1981] memberikan definisi norm-2 sebagai berikut.

Definisi 2.1.4. Misalkan X adalah ruang linear riil dengan dimensi lebih besar dari 1 dan $\|\cdot,\cdot\|$ adalah fungsi bernilai riil pada X x X yang memenuhi syarat:

1). $\|x,y\| = 0$, jika dan hanya jika x dan y bergantung linear

2). $\|x,y\| = \|y,x\|$, untuk setiap $x,y \in X$

3). $\|\alpha x,y\| = |\alpha|\|x,y\|$ untuk α skalar dan $x,y \in X$

4). $\|x,y+z\| \le \|x,y\| + \|x,z\|$, untuk setiap $x,y,z \in X$

Dengan $\|\cdot,\cdot\|$ adalah norm-2 dan $(X,\|\cdot,\cdot\|)$ ruang bernorma-2. serta $\|x,y\| = \|x,y+\alpha x\|$ untuk setiap $x,y \in X$ dan untuk setiap $\alpha \in R$.

Contoh Misal $X=R^2$ dengan norm-2 $\|x,y\|$ adalah luas dari paralellogram yang dibangun oleh vektor x dan y. Maka $\|x,y\|$ adalah norm-2 pada $X=R^2$.

Konsep ruang hasil kali dalam-2 telah diperkenalkan oleh White et all [1991]. Misalkan X adalah ruang linear dengan dimensi lebih besar dari satu dan $(\cdot,\cdot \mid \cdot)$ adalah fungsi bernilai riil pada X x X x X memenuhi syarat berikut:

1). $(x,x \mid z) \ge 0$

$(x,x \mid z) = 0$, jika dan hanya jika x dan z bergantung linear

2). $(x,x \mid z) = (z,z \mid x)$

3). $(x,y \mid z) = (y,x \mid z)$

4). $(\alpha x,y \mid z) = \alpha(x,y \mid z)$, untuk sebarang α

5). $(x+x',y \mid z) = (x,y \mid z) + (x',y \mid z)$

Dengan $(\cdot,\cdot \mid \cdot)$ adalah hasil kali dalam-2 dan $(X,(\cdot,\cdot \mid \cdot))$ adalah ruang hasil kali dalam-2.

Selanjutnya White et all [1991] memberikan beberapa sifat dasar dari hasil kali dalam-2 sebagai berikut.

1). Untuk setiap $x, y, z \in X$, $|(x,y \mid z)| \leq \sqrt{(x,x \mid z)}\sqrt{(y,y \mid z)}$

2). Untuk setiap $x, y \in X$, $(x, y \mid y) = 0$

3). Untuk setiap $x, y, z \in X$ dan $\alpha \in R$ maka $(x,y \mid \alpha z) = \alpha^2 (x,y \mid z)$

4). Untuk setiap $x, y, z, w \in X$

$$(x,y \mid z+w) = (x,y \mid z) + (x,y \mid w) + \frac{1}{2}[(z,w \mid x+y) - (z,w \mid x-y)]$$

5) Jika $(X,(.|.))$ adalah ruang hasil kali dalam, maka hasil kali dalam-2 $(.,.|.)$ didefinisikan pada X dengan

$$(x,y \mid z) = \begin{vmatrix} (x \mid y) & (x \mid z) \\ (y \mid z) & (z \mid z) \end{vmatrix} = (x \mid y)\|z\|^2 - (x \mid z)(y \mid z)$$, untuk setiap $x, y, z \in X$

6). Pada sebarang ruang hasil kali dalam-2 $(X,(\cdot,\cdot \mid \cdot))$, $\|x,y\| = \sqrt{(x,x \mid y)}$ didefinisikan sebagai norm-2 dengan.

$$(x,y \mid z) = \frac{\|x+y,z\|^2 - \|x-y,z\|^2}{4} \text{ dan } \|x+y,z\|^2 + \|x-y,z\|^2 = 2\left(\|x,z\|^2 + \|y,z\|^2\right)$$

7). Misalkan $(X,\|\cdot,\cdot\|)$ adalah ruang linear bernorma-2 dengan kondisi

$\|x+y,z\|^2+\|x-y,z\|^2 = 2\left(\|x,z\|^2+\|y,z\|^2\right)$ memenuhi untuk setiap x, y, $z \in X$. Maka hasil kali dalam-2 $(\cdot,\cdot\mid\cdot)$ pada X didefinisikan dengan

$$(x,y\mid z)=\frac{\|x+y,z\|^2-\|x-y,z\|^2}{4}.$$

Dari sifat-sifat hasil kali dalam-2 terlihat hubungan antara hasil kali dalam dengan hasil kali dalam-2 dan juga hubungan antara hasil kali dalam-2 dengan norm-2 yang terdapat pada sifat yang keenam dan ketujuh dari (sifat-sifat hasil kali dalam-2).

$$(x,y\mid z)=\frac{\|x+y,z\|^2-\|x-y,z\|^2}{4} \text{ dan } \|x+y,z\|^2+\|x-y,z\|^2 = 2\left(\|x,z\|^2+\|y,z\|^2\right).$$

Dari dasar inilah kemudian dapat dikembangkan hasil kali dalam menjadi hasil kali dalam-2 dan kemudian dapat dikembangkan lagi menjadi hasil kali dalam-2k, begitu juga berlaku untuk normnya dapat dikembangkan menjadi norma-2k yang selanjutnya akan dibahas pada bagian berikutnya.

Seperti halnya hasil kali dalam dapat dikembangkan menjadi hasil kali dalam-2 maka untuk konveks sempurna juga dapat dikembangkan menjadi konveks-2 sempurna. Lebih jauh sifat-sifat atau karakteristik dari konveks-2 sempurna dalam ruang linear bernorma-2 telah banyak dibahas diantaranya oleh Cho et all [1981], Cho dan Kim [1992]. White et all [1997] memberikan definisi konveks sempurna sebagai berikut.

Definisi 2.1.5. Dalam ruang linear bernorma-2 $(X,\|\cdot,\cdot\|)$ dikatakan konveks sempurna jika $\|x,z\|=\|y,z\|=\frac{1}{2}\left(\|x+y,z\|\right)=1$ mengakibatkan $y=x$ dengan $z\notin V(x,y)$ dan x, y, $z \in X$ dengan $V(x, y)$ dinyatakan sebagai subruang dari X yang dibangun oleh x dan y.

Sedangkan Cho et all [1992] dengan versi yang berbeda memberikan definisi untuk konveks sempurna sebagai berikut.

Definisi 2.1.6. Dalam ruang linear bernorma-2 $(X,\|\cdot,\cdot\|)$ dikatakan konveks sempurna jika kondisi $x, y \neq 0$ dan $z \notin V(x, y)$ dan $\|x+y, z\| = \|x, z\| + \|y, z\|$ mengakibatkan $y=\alpha x$ untuk $\alpha > 0$.

Definisi 2.1.7. Dalam ruang linear bernorma-2 $(X,\|\cdot,\cdot\|)$ dikatakan konveks-2 sempurna (konveks-2 sempurna) jika $\|x, y\| = \|y, z\| = \|x, z\| = \frac{1}{3}(\|x+z, y+z\|) = 1$ mengakibatkan $z=x+y$ dengan $z \notin V(x, y)$ dan $x, y, z \in X$.

Berdasarkan definisi di atas Cho et all [1992] memperluas definisi konveks-2 sempurna dari ruang linear bernorma-2 seperti pada teorema berikut.

Teorema 2.1.1. Dalam ruang linear bernorma-2 $(X,\|\cdot,\cdot\|)$ adalah konveks-2 sempurna jika dan hanya jika $\|x+z, y+z\| = \|x, y\| + \|y, z\| + \|x, z\|$ dan $\|x, y\|\|y, z\|\|x, z\| \neq 0$ mengakibatkan $z = \alpha x + \beta y,\ \alpha, \beta > 0$.

Bukti. $(\Rightarrow)$ Misalkan $(X,\|\cdot,\cdot\|)$ adalah konveks-2 sempurna dan $\|x+z, y+z\| = \|x, y\| + \|y, z\| + \|x, z\|$, akan ditunjukkan $z=\alpha x+\beta y$. Dari definisi di atas diperoleh $\frac{1}{3}(\|x+z, y+z\|) = \|x, y\| = \|y, z\| = \|x, z\| = 1$ mengakibatkan $z=x+y$, maka $(\|x+z, y+z\|) = 3\|x, y\|$, ambil $x=\alpha x$ dan $y=\beta y$, $\alpha, \beta > 0$, maka diperoleh

$$\frac{1}{3}(\|\alpha x+z, \beta y+z\|) = \|\alpha x, \beta y\| \qquad \ldots(2.1.1)$$

dengan $(\|x+z, y+z\|) = 3\|y, z\|$, jadi

$$\frac{1}{3}(\|\alpha x + z, \beta y + z\|) = \|\beta y, z\| \quad \ldots(2.1.2)$$

dan

$$\frac{1}{3}(\|\alpha x + z, \beta y + z\|) = \|\alpha x, z\| \quad \ldots(2.1.3)$$

dari persamaan (2.1.1), (2.1.2), dan (2.1.3), maka diperoleh

$$\frac{1}{3}(\|\alpha x + z, \beta y + z\|) = \|\alpha x, \beta y\| = \|\beta y, z\| = \|\alpha x, z\|$$

dan berdasarkan definisi diperoleh mengakibatkan $z=\alpha x+\beta y$

$(\Leftarrow)$ $\|x+z, y+z\| = \|x,y\| + \|y,z\| + \|x,z\|$ dan $z=\alpha x+\beta y$, akan ditunjukkan $(X,\|\cdot,\cdot\|)$ adalah konveks sempurna. Untuk itu ambil $\alpha = 1$ $\beta = 1$, maka berdasarkan definisi diperoleh $(X,\|\cdot,\cdot\|)$ konveks-2 sempurna.

2.2. Ruang Metrik-2 dan Ruang Hasil Kali Dalam-2*k*

Misalkan X suatu ruang vektor berdimensi $n > 1$, ρ fungsi bernilai riil positip yang didefinisikan pada X^{n+1} dikatakan symetrik total jika untuk semua $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ dan setiap permutasi π pada $\{1, 2, \ldots, n+1\}$

$$\rho(x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, \ldots, x_{\pi(n+1)}) = \rho(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$$

Deza dan Rosenberg [1999] mendefinisikan ruang n-semimetrik sebagai berikut

Definisi. 2.2.1. Misalkan $n > 0$. Ruang n-semimetrik adalah pasangan $(X;\rho)$ dengan $\rho : X^{n+1} \to R^+$ yang simetrik total dan memenuhi ketaksamaan

$$\rho(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \leq \sum \rho(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{n+2})$$

Definisi dari ruang norma-n pertama sekali diberikan oleh Kim & Cho. [1996.], yaitu sebagai berikut. Misalkan $n \in N$ dan X ruang vektor riil berdimensi d, dengan $d \geq n$ (dalam hal ini d mungkin tak hingga), fungsi bernilai riil $\|.,\ldots,.\| : X^n \to R$, disebut norma-n pada X bila memenuhi syarat berikut ini.

1. $\|x_1, \ldots, x_n\| = 0$ jika dan hanya jika $x_1, \ldots, x_n$ bergantung linear.
2. $\|x_1, \ldots, x_n\|$ takberubah terhadap setiap kombinasinya
3. $\|x_1, \ldots, x_{n-1}, \alpha x_n\| = \alpha \|x_1, \ldots, x_{n-1}, \alpha x_n\|$
4. $\|x_1, \ldots, x_{n-1}, y + z\| \leq \|x_1, \ldots, x_{n-1}, y\| + \|x_1, \ldots, x_{n-1}, z\|$

Dengan kata lain $(X; \|.,\ldots,.\|)$ disebut ruang norma-n.

Misalkan X adalah ruang linear bernorma dan $k \neq 0 \in N$. X^{2k} dinotasikan sebagai XxXx... xX sebanyak $2k$ faktor. Hasil kali dalam-$2k$ adalah perluasan dari hasil kali dalam biasa dan hasil kali dalam-Q (quaternionic inner product). Karena itu sifat-sifat yang berlaku tidak jauh berbeda untuk hasil kali dalam-$2k$.

Definisi 2.2.2. Sebuah pemetaan $(\cdot,\ldots,\cdot) : X^{2k} \to R$ dikatakan hasil kali dalam-$2k$ jika

(i). $(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, x_3, \ldots, x_{2k+1}) = \alpha_1(x_1, x_3, \ldots, x_{2k+1}) + \alpha_2(x_2, x_3, \ldots, x_{2k+1}), \alpha_1, \alpha_2 \in R$

(ii). $(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(2k)}) = (x_1, \ldots, x_{2k}), \sigma \in S_{2k}$ dengan S_{2k} adalah kumpulan semua permutasi dari $\{1,\ldots,2k\}$.

(iii). $(x, \ldots, x) > 0$ jika $x \neq 0$

(iv). Ketaksamaan Cauchy-Buniakowski-Scwarz (CBS)

$|(x_1, \ldots, x_{2k})|^{2k} \leq \prod_{i=1}^{2k} (x_i, \ldots, x_i)$ adalah sama jika dan hanya jika $x_1,\ldots,x_{2k}$ bergantung linear.