BAB II.

TEOREMA TITIK TETAP

Bila X ruang ruang linear bernorm, maka pada X senantiasa dapat dibentuk metrik padanya. Jadi norm adalah merupakan bentuk khusus dari metrik. Dengan memulai membicarakan teorema titik tetap pada ruang metrik, pada bab ini akan dibicarakan beberapa bentuk teorema titik tetap, yang dimulai dengan teorema titik tetap Banach yang akan dikembangkan menjadi titik tetap untuk pemetaan yang tak mengembang.

2.1. Titik tetap pada ruang metrik.

Konvergensi suatu barisan, barisan Cauchy pada ruang metrik lengkap serta pemetaan kontraksi, merupakan konsep dasar untuk pembuktian dari teorema titik tetap Banach. Maka pada sub bab ini akan dibahas terlebih dahulu beberapa konsep dasar tersebut.

Definisi 2.1.1. Misalkan (X,d) Ruang Metrik dan Barisan $\{x_n\}$ di dalam M dikatakan konvergen ke-x $\in$ M, jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $n_0 \in N$ sehingga $d(x_n, x) < \varepsilon$, bila $n \geq n_0$.

Definisi 2.1.2. Misalkan (X,d) adalah Ruang Metrik $\{x_n\}$ dikatakan barisan Cauchy di dalam X, jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $n_0 \in N$ sehingga $d(x_n, x_m) < \varepsilon$, untuk setiap $m, n \geq n_0$.

Setiap barisan yang konvergen di ruang real adalah Barisan Cauchy. Untuk itu dalam hal ini akan di tunjukkan pula bahwa di ruang metrik juga ditemui hal yang demikian.

Teorema 2.1.1. Misalkan (X,d) adalah ruang Metrik, jika $\{x_n\}$ adalah barisan yang konvergen di X, maka $\{x_n\}$ adalah barisan Cauchy.

Bukti : Misalkan $\{x_n\}$ barisan di X yang konvergen ke-x, berarti untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $n_0 \in N$ sehingga

$$d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ untuk setiap } n \geq n_0,$$

dan juga berlaku

$$d(x_m, x) < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ untuk setiap } m \geq n_0,$$

jika $m,n \geq n_0$, maka :

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x) + d(x, x_m) \\ &\leq d(x_n, x) + d(x_m, x) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

Jadi $\{x_n\}$ adalah barisan Cauchy. ■

Definisi 2.1.3. (M,d) adalah ruang Metrik, misalkan E himpunan bagian dari M. Suatu titik $x \in M$ dikatakan titik limit dari E jika terdapat barisan $\{x_n\}$ dari titik-titik di E yang konvergen ke-x.

Definisi 2.1.4. Ruang Metrik (X,d) dikatakan lengkap jika setiap barisan cauchy di X konvergen ke suatu titik di X.

Dalam ruang Metrik juga ditemukan pemetaan terhadap dirinya sendiri atau dari ruang Metrik ke ruang Metrik seperti sama halnya pada ruang Real. Dari sifat pemetaan tersebut, baik didalam ruang Metrik maupun di ruang real di jumpai suatu pemetaan yang bersifat Kontraksi.

Definisi 2.1.5. Misalkan (X,d) adalah ruang Metrik, Pemetaan $T : X \to X$ dikatakan suatu pemetaan Kontraksi pada X jika terdapat $K \in (0,1)$ sehingga

$$d(Tx,Ty) \leq Kd(x,y).$$

Misalkan suatu fungsi $T: [a,b] \to \Re$ jika terdapat $x \in [a,b]$ sedemikian sehingga $T(x) = x$, maka x dikatakan Titik Tetap dari fungsi T. Keberadaan titik tetap untuk fungsi yang ditulis di ruang Metrik telah banyak dibahas di dalam berbagai buku Analisis, salah satu di antaranya adalah Goldberg [1976] dalam teorema berikut :

Teorema 2.1.2. Misalkan (X,d) adalah Ruang Metrik lengkap, jika T adalah suatu pemetaan yang Kontraksi di X maka akan terdapat satu dan hanya satu titik di X sehingga $Tx = x$.

Bukti : Misalkan $x,y \in X$ dan di ketahui bahwa T adalah suatu kontraksi di X berarti : $d(Tx,Ty) \leq K\, d(x,y)$

jadi

$$d(T^2x,T^2y) = d(\,T(Tx),T(Ty)\,)$$

$$d(T^2x,T^2y) \leq K\, d(Tx,Ty)$$

$$\leq K^2\, d(x,y)$$

$$d(T^3x, T^3y) = d(T(T^2x), T(T^2y))$$

$$\leq K\, d(T^2x, T^2y)$$

$$\leq K^3\, d(x,y)$$

.

.

.

$$d\left(T^{n-1}x, T^{n-1}y\right) = d\left(T\left(T^{n-2}x\right), T\left(T^{n-2}y\right)\right)$$

$$\leq K\, d\left(\left(T^{n-2}x\right), \left(T^{n-2}y\right)\right)$$

$$\leq K.K^{n-2}\, d(x, y)$$

$$\leq K^{n-1}\, d(x, y)$$

$$d\left(T^n x, T^n y\right) = d\left(T\left(T^{n-1}x\right), T\left(T^{n-1}y\right)\right)$$

$$\leq K\, d\left(T^{n-1}x, T^{n-1}y\right)$$

$$\leq K.K^{n-1}\, d(x, y)$$

$$\leq K^n\, d(x, y)$$

maka diperoleh

$$d\left(T^n x, T^n y\right) \leq K^n\, d(x, y),$$

kemudian misalkan $x_0 \in X$ dan didefinisi kan barisan $\{x_n\}$ dengan $x_{n+1} = Tx_n$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, sehingga

$$x_2 = Tx_1 = T(Tx_0) = T^2x_0$$

$$x_3 = Tx_2 = T\left(T^2x_0\right) = T^3x_0$$

.

.

$$x_{n-1} = Tx_{n-2} = T\left(T^{n-2}x_0\right) = T^{n-1}x_0$$

$$x_n = Tx_{n-1} = T\left(T^{n-1}x_0\right) = T^n x_0$$

Selanjutnya terlebih dahulu akan ditunjukkan bahwa $\{x_n\}$ adalah barisan Cauchy. Jika $m,n \in N$ dan $m > n$, misalkan $m = n + p$ sehingga diperoleh

$$
\begin{aligned}
d(x_n,x_m) &= d(x_n,x_{n+p}) \\
&\le d(x_n,x_{n+1}) + d(x_{n+1},x_{n+2}) + \dots\dots\dots + d(x_{n+p-1},x_{n+p}) \\
&= d(T^n x_0,T^n x_1) + d(T^{n+1}x_0,T^{n+1}x_1) + \dots\dots\dots + d(T^{n+p-1}x_0,T^{n+p-1}x_1) \\
&\le K^n\, d(x_0,x_1) + K^{n+1}d(x_0,x_1) + \dots\dots\dots + K^{n+p-1}d(x_0,x_1) \\
&\le d(x_0,x_1)\left[K^n + K^{n+1} + \dots\dots\dots + K^{n+p-1}\right] \\
&\le K^n d(x_0,x_1)\left[\,1 + K + K^2 + \dots\dots\dots\dots\right]
\end{aligned}
$$

karena $1 + K + K^2 + \dots\dots = \sum_{n=0}^{\infty} K^n$ untuk $0 < K < 1$

akan konvergen ke $\dfrac{1}{1-K}$, sehingga

$$d(x_n, x_m) \le \frac{K^n d(x_0, x_1)}{1-K}$$

karena $\lim_{n\to\infty} K^n = 0$, untuk $0 < K < 1$

maka akan terdapat suatu $\varepsilon > 0$ sehingga $d(x_n,x_m) < \varepsilon$ dengan kata lain bahwa barisan $\{x_n\}$ adalah barisan cauchy.

Karena ruang metrik (X,d) adalah lengkap berarti terdapat $x \in X$ sedemikian sehingga $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, maka akan berlaku juga untuk $\lim_{n\to\infty} Tx_n = Tx$. Tetapi $x_{n+1} = Tx_n$ berarti Tx_n adalah subbarisan dari x_n yang konvergen sehingga akan menyebabkan $Tx = x$. Misalkan $Ty = y$ merupakan titik tetap yang lain dari pemetaan T, sehingga

$$d(x,y) = d(Tx,Ty) \leq K\, d(x,y).$$

Karena $x \neq y$ maka $d(x,y) \neq 0$ akibatnya $K > 1$, sedangkan $0 < K < 1$. Jadi haruslah $x = y$.

2.2. Titik Tetap Untuk Pemetaan Tak Mengembang

Ruang inner product (ruang hasil kali dalam) merupakan konsep dasar untuk pembentukan ruang pre Hilbert, ruang pre Hilber yang lengkap merupakan ruang Hilbert. Sedangkan ruang linear bernorm yang lengkap disebut dengan ruang Banach. Pada Bagian ini akan dibahas kewujudan titik tetap untuk pemetaan tak mengembang pada ruang Banach

Definisi 2.2.1. Jika X Ruang Linier atas Lapangan R, norm dari X adalah fungsi bernilai real pada X, sehingga untuk $x \in X$ yang didefinisikan oleh $\|x\|$ yang memenuhi sifat-sifat berikut :

1. $\|x\| > 0$ untuk $x \neq 0$ dan $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ untuk semua $x \in X$ dan $\alpha \in R$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, (ketaksamaan segitiga).

Suatu Ruang linier bernorm atas lapangan R adalah pasangan $(X, \|.\|)$ *dan* $\|.\|$ disebut Norm untuk X.

Definisi 2.2.2. Ruang Linier Bernorm X dikatakan lengkap, jika untuk setiap barisan cauchy di X konvergen ke elemen (titik) di X.

Definisi 2.2.3. Ruang linier bernorm yang lengkap disebut Ruang Banach. Berikut ini akan dikemukakan tentang Ruang Hasil Kali Dalam (Inner Product atau Pre-Hilbert space).

Definisi 2.2.4. Misalkan X ruang linier atas lapangan R, hasil kali dalam (inner product atau pre-hilbert space) pada X adalah pemetaan X x X pada R sehingga untuk setiap pasangan vektor $x,y \in X$ yang dinyatakan sebagai skalar yang ditulis dengan $\langle x, y \rangle$ dan memenuhi sifat-sifat berikut :

1. $\langle x,x \rangle \geq 0$ dan $\langle x,x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $\langle x,y \rangle = \langle y,x \rangle$
3. $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x,y \rangle$
4. $\langle x, y+z \rangle = \langle x,y \rangle + \langle x,z \rangle$

berlaku untuk semua x, y, $z \in X$ dan $\alpha \in R$.

Dalam Skripsi ini hasil kali dalam (inner product) atas X didefinisikan oleh $\|x\| = \langle x,x \rangle^{1/2}$.

Definisi 2.2.5. Ruang hasil kali dalam (inner product space) yang lengkap disebut Ruang Hilbert.

Definisi 2.2.6. Misalkan X ruang Banach dan misalkan C himpunan di X, maka pemetaan $T: C \to X$ dikatakan tak Mengembang jika untuk suatu $x,y \in C$, berlaku :

$$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$$

Suatu himpunan C adalah konvek, jika untuk setiap titik x_1,x_2 dalam himpunan C, yang mana penggal garis yang menghubungkan titik-titik ini adalah juga dalam himpunan C. Dengan kata lain C konvek, jika $x_1,x_2 \in C$ maka :

$$x = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 \in C \text{ dengan } 0 \le \alpha \le 1$$

Teorema 2.2.1. Misalkan X ruang Banach dan misalkan C subhimpunan konvek tertutup dan terbatas pada X. Jika $T: C \to C$ pemetaan tak mengembang dan (I-T)(C) adalah subhimpunan tertutup pada X maka T mempunyai titik tetap di C.

Bukti : Misalkan $0 \in C$ dan $\{r_n\}$ bentuk barisan bilangan real positif yang kovergen ke 1 dan $r_n < 1$. Anggap pemetaan $T: C \to C$ dengan

$$T_n(x) = r_n\, T(x) \qquad (2.2.1)$$

Akan ditunjukkan bahwa T adalah pemetaan kontraksi. Misalkan Metrik d didefinisikan dengan $d(x,y) = \|x - y\|$. Berdasarkan definisi kontraksi berlaku

$$d(Tx,Ty) \le K\, d(x,y),$$

untuk suatu $K \in (0,1)$. Maka akan ditunjukkan

$$d(T_n(x),T_n(y)) \le K\, d(T(x),T(y)).$$

Berdasarkan pendefinisian pemetaan T dan definisi metrik d, maka :

$$\begin{aligned} d\big(T_n(x),T_n(y)\big) &= \|T_n(x) - T_n(y)\| \\ &= \|r_n T(x) - r_n T(y)\| \\ &= \|r_n (T(x) - T(y))\| \\ &= r_n \|T(x) - T(y)\| \end{aligned}$$

Pilih $r_n \le K$ maka berlaku

$$r_n\|T(x) - T(y)\| \le K\|T(x) - T(y)\|$$

jadi

$$d(T_n(x), T_n(y)) \leq K\, d(T(x), T(y)).$$

Jelas T adalah pemetaan kontraksi, maka berdasarkan Teorema 2.1.2. terdapat titik tunggal $x_{n0} \in C$ sehingga :

$$T_n(x_{n0}) = (x_{n0}) \qquad (2.2.2)$$

Untuk semua n.

Selanjutnya, ditunjukkan bahwa $(I-T)(x_{n0}) \to 0$ (2.2.3)

Dari persamaan (2.2.1) dan (2.2.2) diperoleh $r_n T(x_{n0}) = (x_{n0})$, jadi diperoleh hubungan :

$$\begin{aligned} x_{n0} - T(x_{n0}) &= x_{n0} - r_n\, T(x_{n0}) + r_n\, T(x_{n0}) - T(x_{n0}) \\ &= x_{n0} - r_n T(x_{n0}) + (r_n - 1)\, T(x_{n0}) \\ &= (r_n - 1)\, T(x_{n0}) \end{aligned}$$

dan karena $r_n < 1$, dan (I-T)(C) adalah subhimpunan tertutup pada X dan $0 \in C$ adalah subhimpunan konvek tertutup dan terbatas pada X maka $0 \in (I-T)(C)$, maka terdapat titik $x_0 \in C$ sehingga $T(x_0) = x_0$. Maka x_0 adalah titik tetap dari T di C ■