BAB I

PENDAHULUAN.

1.1. Latar Belakang.

Teorema Titik Tetap merupakan salah satu teorema yang cukup banyak penggunaannya diberbagai disiplin Ilmu, terutama di bidang ekonomi, Statistik maupun dalam bidang Matematika sendiri. Teorema Titik Tetap telah banyak dikembangkan oleh berbagai ahli Matematika, yang paling terkenal adalah Teorema Titik Tetap dari Kakuntani dan Teorema Titik Tetap dari Browers.

Pengembangan Teorema Titik Tetap ini awalnya lebih banyak penekanannya pada bentuk modifikasi dari ketaksamaannya atau Titik Tetap untuk beberapa fungsi seperti yang disampaikan oleh Wong [1983], Chen [1985]. Kemudian modifikasi Teorema Titik Tetap ini dikembangkan dalam bentuk memperbagaikan kondisi dari pemetaan itu sendiri, misalnya untuk pemetaan yang semi kontrantif yang diberikan oleh Schu [1992].

Proses pembuktian Teorema Titik Tetap dengan berbagai modifikasinya ini, selalu proses pembuktiannya dengan mengkontruksi suatu barisan, yang mana titik konvergensi dari barisan tersebut akan merupakan titik tetap dari pemetaan yang dimaksud. Park [1994] mengembangkan konsep pemetaan tak mengembang dan pemetaan quasi tak mengembang, yang titik tetapnya adalah titik konvergensi lemah dari barisan yang dikontruksi dengan mengambil sebarang titik $x_1 \in C \subseteq X$ dan dengan mendefinsikan barisan

$$x_{n+1} = (1 - \alpha_n)\, x_n + \alpha_n\, Tx_n.$$

Dipihak lain ruang X di atas mungkin saja memenuhi beberapa kondisi lainnya. Berdasarkan hal di atas, penulis merasa perlu menganalisa berbagaai kondisi yang harus dipenuhi oleh ruang X dan pemetaan T dari C ke C agar barisan yang dibentuk di ataas konvergen ke suatu titik tetap dari pemetaan T.

1.2. Perumusan Masalah.

Misalkan X ruang Banach konveks seragam, $C \subseteq X$ dengan C konveks dan $T : C \longrightarrow C$ quasi tak mengembang. Dengan mengambil sebarang titik $x_1 \in C$ dan dengan mendefinisikan barisan $x_{n+1} = (1 - \alpha_n)\, x_n + \alpha_n\, Tx_n$ perlu dianalisa dan dikaji kondisi apa saja yang harus dipenuhi oleh ruang X dan pemetaan T agar supaya barisan yang dibentuk di atas konvergen ke suatu titik tetap dari pemetaan T. Kondisi di atas juga perlu dikaji untuk X yang merupakan ruang linear bernorm-2.

1.3. Tujuan Penelitian.

Adapun tujuan dari penelitian ini adalah menentukan syarat yang harus dipenuhi oleh ruang Banach X yang konveks seragam dan pemetaan quasi tak mengembang, agar barisan yang dikontruksi konvergen kepada titik tetap dari suatu pemetaan. Ruang X yang dimaksud, mungkin merupakan ruang linear bernorm yang biasa atau mungkin juga X merupakan ruang linear bernorm-2.

1.4. Kontribusi Penelitian.

Dengan diperolehnya nanti hasil dari penelitian ini diharapkan dapat memberikan kontribusi dan menambah berbagai bentuk variasi dari Teorema Titik Tetap yang sudah ada. Dilain pihak juga diharapkan dapat menjadi dasar untuk pengembangan Teorema Titik Tetap untuk pemetaan tak mengembang dan pemetaan quasi tak mengembang pada ruang linear bernorm-2.

1.5. Metodologi.

Untuk mencapai hasil yang diharapkan, akan dilakukan langkah-langkah analisis sebagai berikut :

1. Untuk X yang merupakan ruang bernorm dan C himpunan bagian konveks dari X dan $T : C \longrightarrow C$ quasi tak mengembang. Berdasarkan kontruksi barisan di atas akan ditunjukkan bahwa $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|$ ada untuk setiap $x \in F(T)$.

2. Berdasarkan hasil langkah (1) akan ditunjukkan $\lim_{n\to\infty} \|x_n - Tx_n\| = 0$.

3. Untuk $0 < b < c < 1$, $a \geq 0$, $t_n \in [b, c]$ dengan $\{x_n\}$ dan $\{y_n\}$ masing-masing barisan di X yang memenuhi $\lim_{n\to\infty} \sup\|x_n\| \leq a$, $\lim_{n\to\infty} \sup\|y_n\| \leq b$ dan $\lim_{n\to\infty} \|t_n x_n + (1-t_n) y_n\| = a$, akan ditunjukkan bahwa $\lim_{n\to\infty}\|x_n - y_n\| = 0$.

4. Dengan menggunakan sifat demiclosed dari pemetaan $I - T$, akan ditunjukkan bahwa barisan $x_{n+1} = (1 - \alpha_n) x_n + \alpha_n Tx_n$ konvergen lemah ketitik tetap dari pemetaan T.