

PENAKSIR RASIO YANG EFISIEN UNTUK RATA-RATA POPULASI PADA SAMPLING ACAK SEDERHANA MENGGUNAKAN MEDIAN DAN KOEFISIEN KURTOSIS

S. Sabariah^{1*}, Harison², H. Sirait²

¹Mahasiswa Program S1 Matematika

²Dosen Jurusan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Binawidya Pekanbaru, 28293, Indonesia

*sitisabariah289@yahoo.co.id

ABSTRACT

This article discusses two ratio estimators for the population mean in simple random sampling using the auxiliary variable of the median and coefficient of kurtosis and linear combination of ratio estimators. All estimators are biased estimator, then the mean square errors are determined. Furthermore, the mean square errors of each estimators are compared for showing which one is the efficient estimator. An numerical example is given to explain the problem discussed.

Keywords: *ratio estimator, simple random sampling, median, coefficient of kurtosis and mean square error*

ABSTRAK

Pada artikel ini dibahas dua penaksir rasio untuk rata-rata populasi pada sampling acak sederhana menggunakan median dan koefisien kurtosis serta kombinasi linier penaksir rasio. Ketiga penaksir merupakan penaksir bias, kemudian ditentukan *mean square error*. Selanjutnya, dibandingkan *mean square error* dari masing-masing penaksir untuk mendapatkan penaksir yang efisien. Sebuah contoh numerik diberikan pada akhir pembahasan.

Kata kunci: penaksir rasio, sampling acak sederhana, median, koefisien kurtosis dan mean square error

1. PENDAHULUAN

Penaksir rasio merupakan suatu metode yang digunakan untuk meningkatkan ketelitian suatu penaksir, dengan mengambil manfaat hubungan antara variabel y dan variabel tambahan x [1]. Penaksir rasio sederhana untuk rata-rata populasi dinotasikan dengan \hat{Y}_R dan dirumuskan sebagai $\hat{Y}_R = \frac{\bar{y}}{\bar{x}} \bar{X}$, dengan \bar{y} dan \bar{x} berturut-turut menyatakan rata-rata sampel Y dan X serta \bar{X} menyatakan rata-rata populasi X .

Dari penaksir rasio sederhana, Subramani dan Kumarandiyam [5] memodifikasi menjadi penaksir rasio \hat{Y}_{p1} dan penaksir rasio regresi \hat{Y}_{p2} yang menggunakan median (Md) dan koefisien kurtosis (β_2). Singh dan Tailor [4] mengkombinasikan antara penaksir rasio dan penaksir produk. Berdasarkan ide dari Singh dan Tailor, penulis mengkombinasikan antara penaksir \hat{Y}_{p1} dengan penaksir \hat{Y}_{p2} yang dinotasikan dengan \hat{Y}_{kl} . Penaksir dengan menggunakan metode rasio merupakan penaksir bias, sehingga penaksir yang efisien untuk penaksir bias adalah penaksir yang memiliki *Mean Square Error (MSE)* terkecil.

2. SAMPLING ACAK SEDERHANA

Pengambilan sampel acak sederhana merupakan suatu metode untuk mengambil n unit sampel dari N unit populasi, sehingga setiap elemen C_n^N sampel yang berbeda mempunyai kesempatan yang sama untuk dipilih sebagai unit sampel. Pengambilan sampel ini adalah pengambilan sampel acak tanpa pengembalian agar karakteristik unit-unit lebih akurat [1].

Untuk menentukan bias dan *MSE* pada sampling acak sederhana digunakan teorema variansi dan kovariansi.

Teorema 2.1 [1 : h. 27] Apabila sampel berukuran n diambil dari populasi berukuran N yang berkarakter Y , dengan sampling acak sederhana tanpa pengembalian maka variansi rata-rata sampel \bar{y} dinotasikan dengan $V(\bar{y})$ yaitu

$$V(\bar{y}) = \frac{S_y^2}{n} \frac{N-n}{N} = \frac{(1-f)}{n} S_y^2.$$

Bukti: Bukti dari teorema ini dapat dilihat pada [1].

Teorema 2.2 [1 : h. 29] Jika y_i, x_i adalah sebuah pasangan yang bervariasi dalam unit dalam populasi dan \bar{y}, \bar{x} adalah rata-rata dari sampel acak sederhana berukuran n , maka kovariansi adalah

$$Cov(\bar{y}, \bar{x}) = \frac{1-f}{n} \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{Y})(x_i - \bar{X}).$$

Bukti: Bukti dari teorema ini dapat dilihat pada [1].

3. PENAKSIR REGRESI UNTUK RATA-RATA POPULASI

Model regresi linier sederhana dinyatakan dengan persamaan [3]:

$$y_i = \alpha + \beta x_i + e_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1)$$

diasumsikan $E(e_i) = 0$ sehingga $E(y_i) = \alpha + \beta x_i$.

Variabel y_i merupakan variabel tak bebas pada data pengamatan ke- i dan x_i adalah variabel bebas pada pengamatan ke- i . Sedangkan α dan β adalah parameter (koefisien regresi) yang akan ditaksir dan e_i adalah kesalahan pengamatan ke- i . Dari persamaan (1) maka kesalahan pengamatan ke- i ditulis

$$e_i = y_i - \alpha - \beta x_i,$$

dengan demikian jumlah kuadrat kesalahan pengamatan data terhadap garis regresi ditulis

$$\sum_{i=1}^n e_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \alpha - \beta x_i)^2. \quad (2)$$

Dengan meminimumkan persamaan (2), maka penaksir untuk β yaitu

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \quad (3)$$

dan penaksir untuk α yaitu

$$a = \bar{y} - b\bar{x}. \quad (4)$$

Persamaan (3) dapat disederhanakan menjadi

$$b = \frac{s_{xy}}{s_x^2},$$

dengan

$$s_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n-1}$$

$$s_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}.$$

Apabila variabel x dan y mempunyai hubungan kausal atau hubungan sebab akibat, maka secara geometris persamaan regresi melalui titik pangkal. Dari persamaan (4) diperoleh

$$\bar{y} = b\bar{x}, \quad (5)$$

jika koefisien regresi b berlaku untuk rata-rata sampel, maka b juga berlaku untuk rata-rata populasi. Sehingga

$$\bar{Y} = b\bar{X}. \quad (6)$$

Dari pengurangan persamaan (6) dengan persamaan (5) secara aljabar, diperoleh

$$\hat{Y} = \bar{y} + b(\bar{X} - \bar{x}).$$

\hat{Y} disebut penaksir regresi linier untuk rata-rata populasi yang dinotasikan dengan \hat{Y}_{RL} sehingga

$$\hat{Y}_{RL} = \bar{y} + b(\bar{X} - \bar{x}).$$

4. BIAS DAN MSE PENAKSIR RASIO UNTUK RATA-RATA POPULASI

Penaksir rasio dan penaksir rasio regresi untuk rata-rata populasi pada sampling acak sederhana yang menggunakan median dan koefisien kurtosis yaitu

$$\hat{Y}_{p1} = \bar{y} \left(\frac{\bar{X}\beta_2 + Md}{\bar{x}\beta_2 + Md} \right) \quad (7)$$

$$\hat{Y}_{p2} = \frac{\bar{y} + b(\bar{X} - \bar{x})}{(\bar{x}\beta_2 + Md)} (\bar{X}\beta_2 + Md) \quad (8)$$

dengan b menyatakan koefisien regresi Y atas X . Selanjutnya kombinasi linier penaksir rasio dari persamaan (7) dan persamaan (8) yang dirumuskan sebagai

$$\hat{Y}_{kl} = \alpha \left(\bar{y} \left(\frac{\bar{X}\beta_2 + Md}{\bar{x}\beta_2 + Md} \right) \right) + (1 - \alpha) \left(\frac{\bar{y} + b(\bar{X} - \bar{x})}{\bar{x}\beta_2 + Md} (\bar{X}\beta_2 + Md) \right) \quad (9)$$

dengan α menyatakan konstanta, $0 < \alpha < 1$.

Bias dan *MSE* penaksir rasio untuk rata-rata populasi menggunakan median dan koefisien kurtosis pada sampling acak sederhana yaitu

Bias dan *MSE* dari persamaan (7) adalah

$$B(\hat{Y}_{p1}) \approx \frac{1-f}{n} \bar{Y} (\theta_{p1}^2 C_x^2 - \theta_{p1} \rho C_y C_x)$$

$$MSE(\hat{Y}_{p1}) \approx \frac{1-f}{n} \bar{Y}^2 (C_y^2 + \theta_{p1}^2 C_x^2 - 2\theta_{p1} \rho C_x C_y)$$

Bias dan *MSE* dari persamaan (8) adalah

$$B(\hat{Y}_{p2}) \approx \frac{1-f}{n} \frac{S_x^2}{\bar{Y}} R_{p2}^2$$

$$MSE(\hat{Y}_{p2}) \approx \frac{1-f}{n} (R_{p2}^2 S_x^2 + S_y^2 (1 - \rho^2))$$

Bias dan *MSE* dari persamaan (9) adalah

$$B(\hat{Y}_{kl}) \approx \frac{1-f}{n} \rho S_x C_y R_{p2} \alpha$$

$$MSE(\hat{Y}_{kl}) \approx \frac{1-f}{n} (R_{p2}^2 S_x^2 - 2\alpha R_{p2} S_{xy} + \alpha^2 \rho^2 S_y^2 - \rho^2 S_y^2 + S_y^2)$$

5. PENAKSIR RASIO YANG EFISIEN

Untuk menentukan penaksir yang efisien dari penaksir bias, dapat ditentukan dengan cara membandingkan *MSE* dari penaksir \hat{Y}_{p1} , \hat{Y}_{p2} dan \hat{Y}_{kl} , sehingga

1. Perbandingan antara $MSE(\hat{Y}_{kl})$ dengan $MSE(\hat{Y}_{p1})$ diperoleh $MSE(\hat{Y}_{kl}) < MSE(\hat{Y}_{p1})$ jika

$$\frac{R_{p2} S_{xy} - \sqrt{(R_{p2} S_{xy})^2 - \rho^2 S_y^2 W_1}}{\rho^2 S_y^2} < \alpha < \frac{R_{p2} S_{xy} + \sqrt{(R_{p2} S_{xy})^2 - \rho^2 S_y^2 W_1}}{\rho^2 S_y^2}.$$

2. Perbandingan antara $MSE(\hat{Y}_{kl})$ dengan $MSE(\hat{Y}_{p2})$ diperoleh $MSE(\hat{Y}_{kl}) < MSE(\hat{Y}_{p2})$ jika

$$0 < \alpha < \frac{2R_{p2} S_x}{\rho S_y}.$$

3. Perbandingan antara $MSE(\hat{Y}_{p2})$ dengan $MSE(\hat{Y}_{p1})$ diperoleh $MSE(\hat{Y}_{p2}) < MSE(\hat{Y}_{p1})$ jika

$$\beta > \sqrt{R_{p2}^2 - \frac{(\bar{Y}^2 \theta_{p1}^2 C_x^2 - 2\bar{Y}^2 \theta_{p1} \rho C_x C_y)}{S_x^2}}$$

6. CONTOH

Contoh berikut ini merupakan data dari Kadilar dan Cingi [2], yang digunakan untuk mengetahui rata-rata produksi apel (Y) yang terdapat di desa Turki yaitu Aegean pada tahun 1999 dengan memanfaatkan variabel tambahannya yaitu banyaknya pohon apel (X) di desa tersebut. Diketahui data produksi apel di daerah Aegean tersebar di 106 desa. Setiap sampel diambil secara acak sederhana. Informasi yang diperoleh dari data lampiran adalah sebagai berikut

$N = 106$	$\bar{X} = 27421.69811$	$C_y = 5.221618172$
$n = 30$	$\bar{Y} = 2212.254717$	$C_x = 2.085095878$
$\rho = 0.86$	$S_x = 57176.86969$	$f = 0.283018868$
$\beta_2 = 34.57$	$S_y = 11551.54943$	$\theta_{p1} = 0.992361264$
$Md = 7297.5$	$S_{xy} = 568179166.4$	$R_{p2} = 0.080059079$

Dengan menggunakan informasi dari data di atas, diperoleh bahwa

- (i) $MSE(\hat{Y}_{kl}) < MSE(\hat{Y}_{p1})$ jika $-0.07 < \alpha < 1$.
- (ii) $MSE(\hat{Y}_{kl}) < MSE(\hat{Y}_{p2})$ jika $0 < \alpha < 0.9212899302$.
- (iii) $MSE(\hat{Y}_{p2}) < MSE(\hat{Y}_{p1})$ jika $0.17379712 > 0.166817869$.

7. KESIMPULAN

Dari pembahasan di atas diperoleh bahwa penaksir \hat{Y}_{kl} lebih efisien dari penaksir \hat{Y}_{p1} , penaksir \hat{Y}_{kl} lebih efisien dari penaksir \hat{Y}_{p2} dan penaksir \hat{Y}_{p2} lebih efisien dari penaksir \hat{Y}_{p1} . Jadi, dapat disimpulkan bahwa kombinasi linier penaksir rasio merupakan penaksir yang lebih efisien dibandingkan penaksir lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Cochran, W. G. 1991. *Teknik Penarikan Sampel, Edisi Ketiga*. Terj. Dari *Sampling Techniques*, oleh Rudiansyah & E. R Osman. UI Press, Jakarta.
- [2] Kadilar, C. & H. Cingi, 2004. Ratio Estimator in Simple Random Sampling. *Applied Mathematics and Computation*, **151**: 893-902.
- [3] Ramachandran, K. M. & Chris, P. T. 2009. *Mathematical Statistics with Applications*. Academic Press, California.
- [4] Singh, H. P. & R. Tailor. 2005. Estimation of Finite Population Mean with Known Coefficient of Variation of an Auxiliary Character. *Statistica, anno LXV*, n.3: 301-313.
- [5] Subramani, J. & Kumarapandiyan, G. 2012. Modified Ratio Estimator Using Known Median and Co-Efficient of Kurtosis. *American Journal of Mathematics and Statistics*, 2(4): 95-100.