MENENTUKAN PELUANG RUIN DENGAN METODE KOMBINASI EKSPONENSIAL

Karmila[1*], Hasriati[2], Haposan Sirait[2]

[1]Mahasiswa Program S1 Matematika
[2]Dosen Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Univeritas Riau
Kampus Bina Widya 28293 Indonesia

[*]chelsea_holic@rocketmail.com

ABSTRACT

This paper discusses the probability of the state when surplus become negative at the first time in the insurance. That is called the probability of ruin, for the claim amount is supposed to be a combination of exponential distribution. We assume that the claim number distribution is Poisson and the waiting time distribution of the claim is exponential. In this paper, we determine the ruin probability for the claim amount, assuming that it is a combination of exponential distribution, which is called combination of exponential method.

Keywords: *combination of exponential distribution, exponential distribution, poisson distribution, ruin probability*

ABSTRAK

Kertas kerja ini membahas tentang peluang dari keadaan dimana surplus bernilai negatif untuk pertama kalinya yang disebut dengan peluang ruin, untuk besar klaim yang berdistribusi kombinasi eksponensial. Dalam kasus ini, diasumsikan banyak klaim berdistribusi Poisson dan waktu tunggu terjadi klaim berdistribusi eksponensial. Menentukan peluang ruin dari besar klaim yang berdistribusi kombinasi eksponensial disebut dengan metode kombinasi eksponensial.

Kata kunci: distribusi kombinasi eksponensial, distribusi eksponensial, distribusi poisson, peluang ruin

1. PENDAHULUAN

Untuk mengantisipasi kemungkinan adanya kerugian keuangan yang mungkin terjadi di masa yang akan datang karena kejadian-kejadian yang tidak diharapkan, maka seseorang mengikuti program asuransi. Pada program asuransi, perusahaan asuransi membuat perjanjian, yang terdapat dalam polis asuransi, dengan peserta asuransi. Peserta asuransi disebut dengan pemegang polis. Pemegang polis harus membayar premi sesuai dengan kesepakatan yang ada dalam polis asuransi, dan perusahaan asuransi akan memberikan jaminan berupa sejumlah uang yang disebut dengan klaim.

Dalam perusahaan asuransi, proses surplus adalah suatu proses akumulasi dari kekayaan yang diperoleh dengan menjumlahkan modal awal dengan premi yang dibayar oleh setiap pemegang polis kemudian dikurangi dengan total besar klaim yang dikeluarkan oleh perusahaan asuransi. Misalkan total besar klaim yang harus dikeluarkan perusahaan asuransi lebih besar dari jumlah modal awal dan total premi yang dibayar oleh setiap pemegang polis, maka besarnya surplus yang dimiliki perusahaan asuransi akan menjadi negatif. Besarnya surplus menjadi negatif untuk pertama kali disebut dengan ruin [1].

Terjadinya klaim pada suatu perusahaan asuransi tidak dapat diprediksi, karena terjadinya klaim merupakan kejadian random dan besar klaim dinyatakan sebagai variabel random [4]. Sehingga besarnya klaim akan mempunyai distribusi probabilitas. Diasumsikan besar klaim berdistribusi kombinasi eksponensial. Menentukan peluang ruin pada perusahaan asuransi untuk besar klaim yang berdistribusi kombinasi eksponensial disebut dengan metode kombinasi eksponensial. Pada penelitian ini penulis sekedar mendetailkan jurnal ilmiah yang ditulis oleh Dufresne & Gerber dengan judul "*Three Methods to Calculate the Probability of Ruin*" [2].

2. PELUANG RUIN DAN DISTRIBUSI BESAR KLAIM

Pada bagian ini dibahas mengenai peluang ruin dan distribusi dari besar klaim yang diberikan oleh [2] dan [3].

Pada perusahaan asuransi, terdapat suatu proses surplus. Pada [3], misalkan c merupakan laju pertumbuhan income premi (konstan) per satuan waktu t, $S(t)$ merupakan pembayaran klaim agregat saat t, dan u menyatakan modal awal , maka proses surplus pada saat t dapat dinyatakan dengan

$$U(t) = u + ct - S(t), \qquad t \geq 0, \tag{1}$$

dengan

$S(t)$ $:= X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_{N(t)}$

$N(t)$ $:=$ banyak klaim pada waktu t

X_i $:=$ besar klaim ke- i.

Keadaan dimana surplus yang dimiliki oleh perusahaan asuransi kecil dari nol disebut dengan ruin dan titik pada waktu terjadi ruin pada saat pertama kali dinotasikan dengan T, yang dapat dinyatakan dengan

$$T = \begin{cases} \min\{t\}, & \text{untuk } U(t) < 0, t > 0 \\ \infty, & \text{untuk } U(t) \geq 0. \end{cases} \tag{2}$$

Peluang ruin merupakan peluang dari T ketika T bernilai hingga, sehingga peluang ruin untuk modal awal u dapat dinyatakan dengan

$$\psi(u) = \Pr(T < \infty). \tag{3}$$

Diasumsikan besar klaim berdistribusi kombinasi eksponensial, dengan fungsi densitas probabilitasnya dapat dinyatakan sebagai berikut

$$p(x) = \sum_{t=1}^{n} A_t \, \beta_t \, e^{-\beta_t x}, \qquad x > 0, \tag{4}$$

dengan

1. β_t adalah parameter positif yang menyatakan nilai harapan dari distribusi eksponensial dengan$0 < \beta_1 < \beta_2 < \ldots < \beta_n$,
2. Parameter A_t merupakan koefisien kombinasi linear dari distribusi kombinasi eksponensial yang dapat bernilai negatif, dengan $\sum_{t=1}^{n} A_t = 1$.

Pada [2], apabila distribusi kombinasi eksponensial ditranslasi sebesar $\tau > 0$, maka fungsi densitas probabilitasnya dapat dinyatakan dengan

$$p(x) = \sum_{t=1}^{n} A_t \, \beta_t \, e^{-\beta_t (x+\tau)}, \quad \text{untuk}\, x > -\tau \tag{5}$$

dengan nilai harapannya adalah

$$E(x) = \sum_{t=1}^{n} \frac{A_t}{\beta_t} e^{-\beta_t \tau} \tag{6}$$

dan fungsi distribusinya adalah

$$P(x) = 1 - \sum_{t=1}^{n} A_t \, e^{-\beta_t (x+\tau)}. \tag{7}$$

3. PELUANG RUIN DENGAN METODE KOMBINASI EKSPONENSIAL

Pada suatu proses surplus perusahaan asuransi, peluang ruin untuk modal awal u dapat dinyatakan sebagai berikut

$$\psi(u) = \int_0^{\infty} \left(1 - P(u+ct) + \int_{-\tau}^{u+ct} \psi(u+ct-x)\, dP(x) \right) \lambda \, e^{-\lambda t} dt, \tag{8}$$

dimana persamaan (8) mempunyai solusi tunggal.

Lemma 1. Persamaan fungsi

$$g(u) = \int_0^{\infty} \left(1 - P(u+ct) + \int_{-\tau}^{u+ct} g(u+ct-x)\, dP(x) \right) \lambda \, e^{-\lambda t} dt, \tag{9}$$

mempunyai solusi tunggal, untuk $u \geq 0$, dengan syarat $g(\infty) = 0$.

Bukti:

Misalkan persamaan (9) mempunyai dua solusi, yaitu $g_1(u)$ dan $g_2(u)$, dimana $g_1(\infty) = g_2(\infty) = 0$ dan misalkan $\delta(u)$ menyatakan beda dari $g_1(u)$ dan $g_2(u)$, maka $\delta(u) = g_1(u) - g_2(u)$. Sehingga berdasarkan persamaan (9), $\delta(u)$ dapat dinyatakan sebagai berikut

$$\delta(u) = \int_0^\infty \lambda\, e^{-\lambda t} \int_{-\tau}^{u+ct} \delta(u + ct - x)\, dP(x)\ dt\,. \tag{10}$$

Misalkan $m = maks|\delta(u)|$, dengan $u \geq 0$ dan v merupakan titik maksimum,

$$\begin{aligned} m &= |\delta(v)| \\ &= \int_0^\infty \lambda\, e^{-\lambda t} \int_{-\tau}^{v+ct} \delta(v + ct - x)\, dP(x)\ dt \\ &\leq \int_0^\infty \lambda\, e^{-\lambda t} \int_{-\tau}^{v+ct} \delta(v + ct - x)\, dP(x)\ dt \left(\int_0^\infty \lambda\, e^{-\lambda t} \int_{-\tau}^{v+ct} dP(x)\, dt \right) \end{aligned}$$

$$m \ \leq m \left(\int_0^\infty \lambda\, e^{-\lambda t} \int_{-\tau}^{v+ct} dP(x)\, dt \right)$$

$$m \ \leq m. \tag{11}$$

Pertidaksamaan (11) tidak mungkin terjadi, sehingga $g(u)$ mempunyai solusi tunggal. □

Kemudian akan dikonstruksi solusi numerik dari persamaan (8). Misalkan $g(u)$ adalah solusi tunggal dari persamaan (8), maka dengan menggunakan prinsip fraksi parsial $g(u)$ dapat dinyatakan dengan

$$g(u) = \sum_{k=1}^{n} C_k\, e^{-r_k u}. \tag{12}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (12) ke persamaan (9), diperoleh

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} C_k\, e^{-r_k u} &= \sum_{t=1}^{n} \frac{A_t \lambda}{(\lambda + \beta_t c)} e^{-\beta_t (u+\tau)} - \sum_{t=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{A_t \beta_t C_k \lambda}{(\beta_t - r_k)(\lambda + \beta_t c)} e^{-\beta_t (u+\tau)} \\ &\quad + \sum_{t=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{A_t \beta_t C_k \lambda}{(\beta_t - r_k)(\lambda + r_k c)} e^{-r_k (u+\tau)}. \end{aligned} \tag{13}$$

Kemudian dengan membandingkan koefisien $C_k e^{-r_k u}$ yang ada pada ruas kanan dan kiri persamaan (13), diperoleh

$$(\lambda + rc) = \sum_{t=1}^{n} \frac{A_t \beta_t \lambda}{(\beta_t - r)} e^{-r\tau} \,. \tag{14}$$

Maka persamaan (14) merupakan polinomial berderajat *n* dengan akar-akarnya adalah $r_1, \ r_2, \dots, \ r_n$.

Selanjutnya, dengan membandingkan ruas kanan dan kiri persamaan (13) terhadap koefisien $\frac{A_t \lambda}{(\lambda + \beta_t c)} e^{-\beta_t (u+\tau)}$, diperoleh

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\beta_t C_k}{(\beta_t - r_k)} = 1. \tag{15}$$

Maka persamaan (15) merupakan polinomial berderajat *n*, dengan akar-akarnya adalah $C_1, \ C_2, \ \cdots, \ C_n$. Jadi, jika $r_1, \ r_2, \ \cdots, \ r_n$ adalah akar-akar dari persamaan (14) dan $C_1, \ C_2, \ \cdots, \ C_n$ adalah akar-akar dari persamaan (15), maka persamaan (12) adalah solusi persamaan (8), sehingga diperoleh

$$\psi(u) = \sum_{k=1}^{n} C_k \, e^{-r_k u}. \tag{16}$$

Untuk menentukan koefisien peluang ruin pada persamaan (16), diasumsikan suatu fungsi rasional sebagai berikut

$$Q(x) = \frac{\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\beta_j} \prod_{k=1}^{n} (\beta_j - r_k) \prod_{\substack{t=1 \\ t \neq j}}^{n} \left(\frac{x - \beta_j}{\beta_j - \beta_t} \right)}{\prod_{k=1}^{n} (x - r_k)}, \tag{17}$$

dengan $Q(\beta_j) = \frac{1}{\beta_j}$, untuk $j = 0, 1, 2, \dots$

Dengan menggunakan fraksi parsial pada persamaan (17), diperoleh koefisien $D_1, \ D_2, \dots, \ D_n$ yang memenuhi persamaan berikut

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{D_k}{x - r_k} = Q(x). \tag{18}$$

Untuk $x = \beta_j$, persamaan (18) dapat dinyatakan sebagai berikut

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\beta_j D_k}{\beta_j - r_k} = 1. \tag{19}$$

Persamaan (19) ekivalen dengan persamaan (15), sehingga dapat disimpulkan bahwa $D_k = C_k$. Selanjutnya, dengan mensubstitusikan persamaan (17) ke persamaan (18), diperoleh

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x - r_h}{x - r_k} D_k = \frac{\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\beta_j} \prod_{k=1}^{n} \left(\beta_j - r_k\right) \prod_{\substack{t=1 \\ t\neq j}}^{n} \left(\frac{x-\beta_j}{\beta_j-\beta_t}\right)}{\prod_{\substack{k=1 \\ k\neq h}}^{n} (x - r_k)}. \tag{20}$$

Ambil $x = r_h$, maka persamaan (20) dapat dinyatakan dengan

$$D_h = \frac{\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\beta_j} \prod_{k=1}^{n} (\beta_j - r_k) \prod_{\substack{t=1 \\ t\neq j}}^{n} \left(\frac{r_h-\beta_j}{\beta_j-\beta_t}\right)}{\prod_{\substack{k=1 \\ k\neq h}}^{n} (r_h - r_k)}. \tag{21}$$

Karena $D_k = C_k$, maka persamaan (21) dapat dinyatakan sebagai berikut

$$C_h = \frac{\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\beta_j} \prod_{k=1}^{n} (\beta_j - r_k) \prod_{\substack{t=1 \\ t\neq j}}^{n} \left(\frac{r_h-\beta_j}{\beta_j-\beta_t}\right)}{\prod_{\substack{k=1 \\ k\neq h}}^{n} (r_h - r_k)}\ , \tag{22}$$

Kemudian untuk $\tau = 0$, akan ditentukan koefisien r_k dan C_k. Sebelum menentukan koefisien r_k, terlebih dahulu ubah bentuk koefisien $\frac{\beta_t}{\beta_t - r}$ pada persamaan (14) menjadi $1 + \frac{r}{\beta_t - r}$, sehingga persamaan (14) dapat dinyatakan oleh

$$c = \lambda \sum_{t=1}^{n} \frac{A_t}{\beta_t - r}\ . \tag{23}$$

Maka persamaan (23) merupakan persamaan polinomial berderajat *n* dengan akar-akarnya adalah $r_1,\ r_2,\ \cdots,\ r_n$.

Selanjutnya, untuk menentukan nilai koefisien C_k pada saat $\tau = 0$, diberikan suatu persamaan fungsi rasional sebagai berikut

$$\tilde{Q}(x) = \frac{1}{x}\ \frac{\lambda \sum_{t=1}^{n} \frac{A_t}{\beta_t - x} - \lambda(E(x))}{\lambda \sum_{t=1}^{n} \frac{A_t}{\beta_t - x} - c}. \tag{24}$$

Dari persamaan (6) diperoleh

$$E(x) = \sum_{t=1}^{n} \frac{A_t}{\beta_t},$$

sehingga persamaan (24) dapat dinyatakan dengan

$$\tilde{Q}(x) = \frac{1}{x} \; \frac{\lambda \sum_{t=1}^{n} \frac{A_t}{\beta_t - x} - \lambda \sum_{t=1}^{n} \frac{A_t}{\beta_t}}{\lambda \sum_{t=1}^{n} \frac{A_t}{\beta_t - x} - c} \,. \qquad (25)$$

Ambil $x = \beta_j$, sehingga diperoleh $\tilde{Q}(\beta_j) = \frac{1}{\beta_j}$. Karena $\tilde{Q}(x)$ dan $Q(x)$ mempunyai pola yang sama, maka diperoleh bahwa $\tilde{Q}(x)$ dan $Q(x)$ identik. Sehingga dari persamaan (18) diperoleh

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{D_k}{x - r_k} = \tilde{Q}(x). \qquad (26)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (25) ke persamaan (26), diperoleh

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x - r_h}{x - r_k} D_k = \frac{1}{x} \; \frac{\lambda \sum_{t=1}^{n} \frac{A_t}{\beta_t - x} - \lambda \sum_{t=1}^{n} \frac{A_t}{\beta_t}}{\left(\lambda \sum_{t=1}^{n} \frac{A_t}{\beta_t - x} - c\right) / (x - r_h)} \,. \qquad (27)$$

Berdasarkan persamaan (23), persamaan (27) dapat dinyatakan dengan

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x - r_h}{x - r_k} D_k = \frac{1}{x} \; \frac{\sum_{t=1}^{n} \frac{A_t}{\beta_t - x} - \sum_{t=1}^{n} \frac{A_t}{\beta_t}}{\sum_{t=1}^{n} A_t \left(\frac{1}{(\beta_t - x)(\beta_t - r_h)}\right)} \,. \qquad (28)$$

Ambil $x = r_h$, sehingga persamaan (28) dapat dinyatakan dengan

$$D_h = \frac{1}{r_h} \; \frac{\sum_{t=1}^{n} \frac{A_t}{\beta_t - r_h} - \sum_{t=1}^{n} \frac{A_t}{\beta_t}}{\sum_{t=1}^{n} \frac{A_t}{(\beta_t - r_h)^2}} \,.$$

Karena $D_k = C_k$, maka nilai koefisien C_h dapat dinyatakan dengan

$$C_h = \frac{1}{r_h} \; \frac{\sum_{t=1}^{n} \frac{A_t}{\beta_t - r_h} - \sum_{t=1}^{n} \frac{A_t}{\beta_t}}{\sum_{t=1}^{n} \frac{A_t}{(\beta_t - r_h)^2}} \,, \qquad (29)$$

dengan r_h merupakan solusi persamaan (23).

Jadi, peluang ruin perusahaan asuransi untuk klaim yang berdistribusi kombinasi eksponensial yang ditranslasi sebesar $\tau > 0$ merupakan persamaan (16), dengan r_k merupakan solusi persamaan (14) dan C_k dinyatakan pada persamaan (22) dan peluang ruin untuk $\tau = 0$ merupakan persamaan (16), dengan r_k merupakan solusi persamaan (23) dan C_k dinyatakan pada persamaan (29).

4. CONTOH

Suatu perusahaan asuransi mempunyai pembayaran klaim yang berdistribusi kombinasi eksponensial dengan fungsi densitas probabilitasnya sebagai berikut

$$p(x) = 12(e^{-3x} - e^{-4x}),$$

dengan rata- rata banyak klaim adalah 1 klaim per hari, dan laju pertumbuhan income preminya adalah 1 rupiah per hari. Tentukan besar peluang ruin dari perusahaan asuransi tersebut untuk modal awalnya sebesar $0, 0.5, 1, 1.5, \ldots, 9.5, 10, 10.5$ juta rupiah.

Diketahui rata-rata banyak klaim $\lambda = 1$, laju pertumbuhan income premi $c = 1$, fungsi densitas probabilitas dari klaim adalah

$$p(x) = 12(e^{-3x} - e^{-4x}),$$

$n = 2$, koefisien translasi distribusi kombinasi eksponensial $\tau = 0$, dan nilai harapan dari distribusi eksponensial yang dikombinasi linear adalah $\beta_1 = 3$ dan $\beta_2 = 4$, sehingga diperoleh $A_1 = 4$ dan $A_2 = -3$. Kemudian dengan menggunakan persamaan (23), diperoleh

$$c = \lambda \sum_{t=1}^{2} \frac{A_t}{\beta_t - r}$$

$$1 = 1\left(\frac{A_1}{\beta_1 - r} + \frac{A_2}{\beta_2 - r}\right)$$

$$(5 - r)(1 - r) = 0$$

$r_1 = 1$ dan $r_2 = 5$.

Dengan menggunakan persamaan (29), diperoleh C_1 dan C_2, yaitu

$$C_1 = \frac{1}{r_1} \frac{\sum_{t=1}^{2} \frac{A_t}{\beta_t - r_1} - \sum_{t=1}^{2} \frac{A_t}{\beta_t}}{\sum_{t=1}^{2} \frac{A_t}{(\beta_t - r_1)^2}}$$

$$= \frac{1}{1} \frac{\frac{4}{3-1} + \frac{-3}{4-1} - \frac{4}{3} + \frac{3}{4}}{\frac{4}{(3-1)^2} + \frac{-3}{(4-1)^2}}$$

$$C_1 = \frac{5}{8}$$

dan

$$C_2 = \frac{1}{r_2} \frac{\sum_{t=1}^{2} \frac{A_t}{\beta_t - r_2} - \sum_{t=1}^{2} \frac{A_t}{\beta_t}}{\sum_{t=1}^{2} \frac{A_t}{(\beta_t - r_2)^2}}$$

$$= \frac{1}{5} \frac{\frac{4}{3-5} + \frac{-3}{4-5} - \frac{4}{3} + \frac{3}{4}}{\frac{4}{(3-5)^2} + \frac{-3}{(4-5)^2}}$$

$$C_2 = -\frac{1}{24}.$$

Sehingga dari persamaan (16), diperoleh persamaan peluang ruin perusahaan asuransi tersebut adalah sebagai berikut

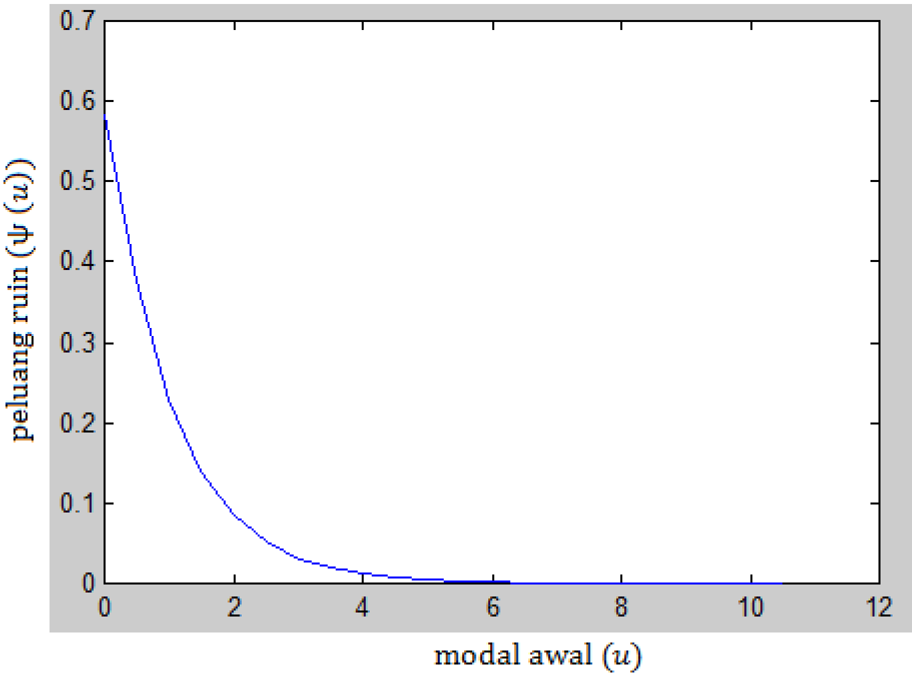
$$\psi(u) = \frac{5}{8}e^{-u} - \frac{1}{24}e^{-5u} .$$

Selanjutnya, dengan menggunakan software MATLAB, ditentukan peluang ruin dengan modal awal sebagai mana terlihat pada Tabel 1.

Tabel 1: Peluang Ruin dari Klaim yang Berdistribusi Kombinasi Eksponensial

modal awal (juta rupiah)	peluang ruin	modal awal (juta rupiah)	peluang ruin
0	0.5833	5.5	0.0026
0.5	0.3757	6	0.0015
1	0.2296	6.5	0.0009
1.5	0.1394	7	0.0006
2	0.0846	7.5	0.0003
2.5	0.0513	8	0.0002
3	0.0311	8.5	0.0001
3.5	0.0189	9	0.0001
4	0.0114	9.5	0.0000
4.5	0.0069	10	0.0000
5	0.0042	10.5	0.0000

Grafik peluang ruin disajikan pada Gambar 1.



Gambar 1: Grafik Peluang Ruin dari Klaim yang Berdistribusi Kombinasi Eksponensial

5. KESIMPULAN DAN SARAN

Menentukan peluang ruin dengan metode kombinasi eksponensial dipengaruhi oleh modal awal yang dimiliki oleh perusahaan asuransi. Peluang ruin perusahaan asuransi berbanding terbalik dengan modal awal. Semakin besar modal awal yang dimiliki oleh perusahaan asuransi, maka semakin kecil kemungkinan perusahaan asuransi tersebut bangkrut. Peluang ruin juga berkaitan erat dengan resiko kerugian yang dimiliki oleh perusahaan asuransi. Jika Perusahaan asuransi mengetahui besar peluang ruin, maka perusahaan asuransi tersebut dapat mengurangi resiko kerugian yang mungkin akan terjadi.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Bowers, N. L., H. U. Gerber, J. C. Hickman, D. A. Jones & C. J. Nesbitt. 1997. *Actuarial Mathematics*. The Society of Actuaries, United States of America.

[2] Dufresne, F & H. U. Gerber. 1986. Three Methods to Calculate the Probability of Ruin. *ASTIN Buletin*, 19: 71-90.

[3] Kass, R., M. Goovaerts, J. Dhaene & M. Denuit. 2001. *Modern Actuarial Risk Theory*. Kluwer Academic Publishers. Netherlands.

[4] Klugman, S. A., H. H. Panjer & G. E. Willmot. 1998. *Loss Models, From to Data to Decisions*. Wiley Series in Probability and Statistics. John Wiley & Sons, Inc.,USA.