TAKSIRAN INTERVAL PARAMETER BENTUK DARI DISTRIBUSI PARETO BERDASARKAN METODE MOMEN DAN MAKSIMUM *LIKELIHOOD*

Jamilah[1*], Firdaus[2], Sigit Sugiarto[2]

[1]Mahasiwa Program S1 Matematika
[2]Dosen Jurusan Matematika
Fakultas Matematika Dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Binawidya Pekanbaru, 28293, Indonesia

[*]Jamilahbunsu@yahoo.com

ABSTRACT

This paper discusses the interval estimation of estimator of the shape parameter α of the Pareto distribution in the case where the scale parameter is known. To obtain the estimator of parameter α, some methods can be used. In this paper we use moment method and maximum likelihood estimation for the data collected under simple random sample, random samples that consist of minimum order statistics and maximum order statistics. Under asumption that sample size of n is large, several estimators of α asimptotically normal distributed has been derived. These asymptotic distributions are used to construct confidence interval for α.

Keywords : *interval estimation, Pareto distribution, moment method, maximum likelihood estimation and asymptotic distribution*

ABSTRAK

Artikel ini membahas tentang taksiran interval dari penaksir parameter bentuk α dari distribusi Pareto dalam kasus dimana parameter skala diketahui. Untuk mendapatkan penaksir parameter α dari distribusi Pareto dapat digunakan berbagai metode. Dalam artikel ini metode momen dan estimasi maksimum *likelihood* digunakan dalam kasus untuk data yang dikumpulkan bedasarkan sampel acak sederhana, sampel acak dari statistik berurut minimum dan berururut maksimum. Dengan asumsi bahwa saat ukuran sampel n besar, telah diturunkan bahwa barisan penaksir α adalah berdistribusi normal secara asimptotik. Distribusi asimptotik inilah yang mengkonstruksi taksiran interval untuk α.

Kata kunci : taksiran interval, distribusi Pareto, metode momen, metode maksimum *likelihood* dan distribusi asimptotik

1. PENDAHULUAN

Distribusi Pareto berasal dari nama seorang ekonom yaitu Vilfredo Pareto (1848-1923) yang mengamati bahwa 80% kekayaan di Milan dimiliki oleh hanya 20% dari penduduknya. Distribusi Pareto sering dipakai pada persoalan uji hidup, seperti waktu sampai rusak atau umur suatu komponen yang diukur dari suatu waktu tertentu sampai rusak. Distribusi Pareto juga sering digunakan sebagai sebuah dasar kerugian dari kebakaran surat perjanjian asuransi dan juga di bidang hidrologi [1],[7]. Fungsi distribusi yang diberikan sebagai berikut.

Misalkan X adalah suatu variabel random dari distribusi Pareto dengan parameter α dan γ, maka fungsi densitas peluang dari X adalah

$$f(x) = \frac{\alpha\gamma^{\alpha}}{x^{\alpha+1}}, \quad x \geq \gamma, \alpha > 0, \gamma > 0 \tag{1}$$

dan fungsi distribusi kumulatifnya adalah

$$F(x) = 1 - \left(\frac{\gamma}{x}\right)^{\alpha}, \quad x \geq \gamma, \alpha > 0, \gamma > 0. \tag{2}$$

Model pareto sering digunakan untuk suatu kasus kerugian yaitu diasumsikan parameter γ dengan kerugian terkecil [1]. Dalam artikel ini penulis mendetailkan taksiran interval parameter bentuk dari distribusi Pareto berdasarkan pada ide dari Omar,dkk yaitu diamsusikan parameter skala dengan diketahui $\gamma = 1$, dan data yang berdasarkan pada sampel acak sederhana, sampel acak yang memuat statistik berurut minimum dan statistik berurut maksimum.

2. TAKSIRAN INTERVAL MENGGUNAKAN METODE MOMEN BERDASARKAN DATA SAMPEL ACAK SEDERHANA

Misalkan $X_1,...,X_n$ adalah sampel acak sederhana berukuran n dari distribusi Pareto dengan fungsi densitas pada persamaan (1). Karena parameter skala diketahui yaitu $\gamma = 1$ maka fungsi densitas peluang dari distribusi Pareto pada persamaan (1) menjadi

$$f(x) = \alpha x^{-(\alpha+1)}, \quad x \geq 1, \alpha > 0 \tag{3}$$

dari persamaan (3) diperoleh rata-rata dan variansi dari distribusi Pareto diperoleh

$$E(X) = \frac{\alpha}{\alpha - 1}, \qquad \alpha > 1 \tag{5}$$

$$Var(X) = \frac{\alpha}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)} \qquad \alpha > 2. \tag{6}$$

Kemudian akan dibentuk taksiran interval untuk α dengan terlebih dahulu mencari penaksir titik dari α dengan menggunakan Metode Momen yang dinotasikan dengan $\hat{\alpha}_{mome,s}$. Diketahui bahwa variabel acak X berdistribusi Pareto dengan rata-rata dan variansi pada persamaan (5) dan (6). Dengan menggunakan metode momen yaitu

$$\mu = \mu_1 = E(X),$$

dimana $\mu = \mu_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, sehingga

$$E(X) = \overline{X}. \tag{10}$$

Untuk mendapatkan penaksir titik $\hat{\alpha}_{mom,s}$, dengan menyelesaikan persamaan (10) dan $E(X)$ pada persamaan (6) diperoleh

$$\hat{\alpha}_{mom,s} = \frac{\overline{X}_{SRS}}{\overline{X}_{SRS} - 1}. \tag{11}$$

Ryttgard [7] telah menunjukkan bahwa $\hat{\alpha}_{mom,s}$ bedistribusi normal secara asimptotik dengan $N\left(\alpha, \frac{\alpha^2}{n} + \frac{\alpha}{n(\alpha - 2)}\right)$ jika $\alpha > 2$ atau dapat dinotasikan dengan

$$\frac{\sqrt{n}\left(\hat{\alpha}_{mom,s} - \alpha\right)}{\sqrt{\alpha^2 + \frac{\alpha}{(\alpha - 2)}}} \xrightarrow{d} N(0,1). \tag{12}$$

Sehingga dari persamaan (12) dapat dibentuk taksiran interval dua sisi yaitu

$$\left[\hat{\alpha}_{mom,s} - Z_{(\alpha_0/2)}\sqrt{\left(\frac{\alpha^2}{n} + \frac{\alpha}{n(\alpha - 2)}\right)}, \hat{\alpha}_{mom,s} + Z_{(\alpha_0/2)}\sqrt{\left(\frac{\alpha^2}{n} + \frac{\alpha}{n(\alpha - 2)}\right)}\right]. \tag{13}$$

Jadi persamaan (13) adalah interval kepercayaan untuk α di sekitar $100(1 - \alpha_0)\%$.

3. TAKSIRAN INTERVAL DENGAN MENGGUNAKAN METODE MAKSIMUM LIKELIHOOD BERDASARKAN SAMPEL ACAK SEDERHANA

Pandang kembali sampel acak $X_1,...,X_n$ adalah sampel acak sederhana berukuran n dari distribusi Pareto dengan fungsi densitas pada persamaan (3). Karena parameter α tidak diketahui maka akan dicari penaksir α dengan menggunakan Metode Maksimum *Likelihood*, yang dinotasikan dengan $\hat{\alpha}_{mle,s}$.

Fungsi *likelihood* dari persamaan (3) adalah

$$L(\alpha; x_1, x_2, ..., x_n) = \alpha^n \prod_{i=1}^{n} X_i^{-(\alpha+1)}, \tag{14}$$

selanjutnya fungsi *log likelihood* dari persamaan (14), yaitu

$$\ln L(1,\alpha) = n \ln \alpha - (\alpha+1) \ln \prod_{i=1}^{n} X_i, \tag{15}$$

untuk mendapatkan $\hat{\alpha}_{mle,s}$ melalui metode maksimum *likelihood* dilakukan dengan mencari turunan pertama pada persamaan (15) terhadap α , kemudian disamakan dengan nol, sehingga diperoleh penaksir maksimum likelihood dari α yang dinotasikan dengan $\hat{\alpha}_{mle,s}$ yaitu

$$\hat{\alpha}_{mle,s} = n\left(\sum_{i=1}^{n} \ln X_i\right)^{-1}, \tag{16}$$

dari persamaan (16) diperoleh sifat penaksir yaitu penaksir yang bias. Selanjutnya diperoleh pula penaksir yang tak bias dengan variansi minimum yaitu

$$\hat{\alpha}_{umvue,s} = \frac{n-1}{\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i)}.$$

Berdasarkan Lehmann [6], telah dibuktikan bahwa $\hat{\alpha}_{mle,s}$ dan $\hat{\alpha}_{umvue,s}$ berdistribusi normal secara asimptotik dengan $N\left(\alpha, \frac{\alpha^2}{n}\right)$ atau dinotasikan dengan

$$\sqrt{nI(\alpha)}(\hat{\alpha}_{mle,s} - \alpha) \xrightarrow{d} N(0,1). \tag{17}$$

Sehingga dari persamaan (17) diperoleh taksiran dua sisi untuk masing masing penaksir $\hat{\alpha}_{mle,s}$ dan $\hat{\alpha}_{umvue,s}$ yaitu

$$\left[\hat{\alpha}_{mle,s} - \frac{\alpha}{\sqrt{n}} Z_{(\alpha_0/2)}, \hat{\alpha}_{mle,s} + Z_{(\alpha_0/2)} \frac{\alpha}{\sqrt{n}}\right], \tag{18}$$

dan

$$\left[\hat{\alpha}_{umvue,s} - \frac{\alpha}{\sqrt{n}} Z_{(\alpha_0/2)}, \hat{\alpha}_{umvue,s} + Z_{(\alpha_0/2)} \frac{\alpha}{\sqrt{n}}\right]. \tag{19}$$

Jadi persamaan (18) dan (19) adalah interval kepercayaan untuk α di sekitar $100(1-\alpha_0)\%$.

4. TAKSIRAN INTERVAL DENGAN MENGGUNAKAN METODE MOMEN BERDASARKAN STATISTIK BERURUT MINIMUM

Misalkan $X_{(1:m)1},...,X_{(1:m)n}$ adalah sampel *ranked set* yang memuat statistik berurut minimum berukuran n dengan setiap *set* berukuran m. Anggap bahwa $X_{(1:m)1},...,X_{(1:m)n}$ berdistribusi independen secara identik. Fungsi densitas dari sampel acak statistik berurut minimum yaitu

$$g_{(1:m)}(x;\alpha) = m[x^{-\alpha}]^{m-1}\alpha x^{-(\alpha+1)}, \tag{20}$$

kemudian dari fungsi densitas persamaan (20) didapat rata-rata dan variansi yaitu

$$E(X) = \frac{\alpha m}{\alpha m - 1}, \qquad \alpha m > 1 \tag{21}$$

$$Var(X) = \frac{\alpha m}{(\alpha m - 1)^2(\alpha m - 2)}, \; \alpha m > 2 \tag{22}$$

selanjutnya, akan dicari taksiran titik dan interval untuk α dengan metode momen, dimana $\hat{\alpha}_{mome(1)}$ dinotasikan sebagai penaksir titik dengan metode momen menggunakan statistik berurut minimum yaitu

$$E\left(X_{(1:m)}\right) = \bar{X}_{(1:m)}, \tag{23}$$

dengan menyelesaikan persamaan (23) dimana $E\left(X_{(1:m)}\right)$ pada persamaan (21) diperoleh penaksir $\hat{\alpha}_{mome(1)}$ yaitu

$$\hat{\alpha}_{mome(1)} = \bar{X}_{(1)}\left(m\left(\bar{X}_{(1)} - 1\right)\right)^{-1}.$$

Berdasarkan Lehmann[6], telah dibuktikan bahwa $\hat{\alpha}_{mome(1)}$ berdistribusi normal secara asimptotik dengan $N\left(\alpha, \frac{\alpha(\alpha m-1)^2}{m(\alpha m-2)}\right)$ jika $\alpha > 2$ atau dinotasikan dengan

$$\frac{\sqrt{n}\left(\hat{\alpha}_{mome(1)} - \alpha\right)}{\sqrt{\frac{\alpha(\alpha m-1)^2}{m(\alpha m-2)}}} \xrightarrow{d} N(0,1). \tag{24}$$

Sehingga dari persamaan (24) diperoleh taksiran interval dua sisi yaitu

$$\left[\hat{\alpha}_{mome(1)} - Z_{(\alpha_0/2)}\sqrt{\frac{\alpha(\alpha m-1)^2}{nm(\alpha m-2)}}, \hat{\alpha}_{mome(1)} + Z_{(\alpha_0/2)}\sqrt{\frac{\alpha(\alpha m-1)^2}{nm(\alpha m-2)}}\right] \tag{25}$$

Jadi persamaan (25) adalah interval kepercayaan untuk α di sekitar $100(1-\alpha_0)\%$.

5. TAKSIRAN INTERVAL UNTUK SAMPEL STATISTIK BERURUT MINIMUM DENGAN METODE MAKSIMUM *LIKELIHOOD*

Pandang kembali sampel acak yang memuat statistik berurut minimum $X_{(1:m)1},\ldots,X_{(1:m)n}$ dengan fungsi densitas pada persamaan (20). Akan dibentuk taksiran interval untuk α dengan terlebih dahulu mencari penaksir $\hat{\alpha}$ dengan menggunakan Metode Maksimum *Likelihood* yang dinotasikan dengan $\hat{\alpha}_{mle(1)}$. Dimana fungsi *likeilhood* dari persamaan (20) adalah

$$L(\alpha; X_{(1:m)}) = (m\alpha)^n \prod_{j=1}^{n} (x)^{-(\alpha m+1)}, \tag{26}$$

selanjutnya fungsi *log likelihood* dari persamaan (26) adalah

$$\ln L(\alpha; X_{(1:m)}) = n\ln\alpha + n\ln m - (m\alpha+1)\sum_{j=1}^{n}\ln(x_{(1:m)j}), \tag{27}$$

untuk mendapatkan $\hat{\alpha}_{mle(1)}$ melalui metode maksimum *likelihood* dilakukan dengan mencari turunan pertama pada persamaan (27) terhadap α untuk memperoleh $\hat{\alpha}_{mle(1)}$ maka persamaan (27) disamakan dengan nol sehingga diperoleh $\hat{\alpha}_{mle(1)}$ yaitu

$$\hat{\alpha}_{mle(1)} = n\left(m\sum_{i=1}^{n}\ln x_{(1:m)i}\right)^{-1}.$$

Selanjutnya berdasarkan Lehmann [6], telah dibuktikan bahwa $\hat{\alpha}_{mle(1)}$ berdistribusi normal secara asimptotik dengan $N\left(\alpha, \frac{\alpha^2}{n}\right)$ atau dinotasikan dengan

$$\sqrt{nI(\alpha)}(\hat{\alpha}_{mle(1)} - \alpha) \xrightarrow{d} N(0,1). \quad (28)$$

Sehingga dari persamaan (28) diperoleh taksiran interval dua sisi untuk penaksir $\hat{\alpha}_{mle(1)}$ yaitu

$$\left[\hat{\alpha}_{mle(1)} - \frac{\alpha}{\sqrt{n}} Z_{(\alpha_0/2)}, \hat{\alpha}_{mle(1)} + Z_{(\alpha_0/2)} \frac{\alpha}{\sqrt{n}}\right]. \quad (29)$$

Jadi persamaan (29) adalah interval kepercayaan untuk α di sekitar $100(1-\alpha_0)\%$.

6.TAKSIRAN INTERVAL UNTUK SAMPEL STATISTIK BERURUT MAKSIMUM DENGAN METODE MAKSIMUM *LIKELIHOOD*

Misalkan $X_{(m)1},...,X_{(m)n}$ sampel acak *ranked set* yang memuat statistik berurut maksimum berukuran n dengan *set* berukuran m. Anggap bahwa $X_{(m)1},...,X_{(m)n}$ berdistribusi independen secara identik. Fungsi densitas dari sampel acak statistik berurut maksimum adalah

$$g_{(m:m)}(x;\alpha) = m\left[1 - x^{-\alpha}\right]^{m-1} \alpha x^{-(\alpha+1)}. \quad (30)$$

Selanjutnya akan dibentuk taksiran interval untuk α dengan terlebih dahulu mencari penaksir titik α dengan menggunakan Metode Maksimum *Likelihood* yang dinotasikan dengan $\hat{\alpha}_{mle,m}$. Fungsi *likelihood* dari persamaan (30) adalah

$$L(\alpha; X_{(m:m)}) = (m\alpha)^n \prod_{j=1}^{n} (1 - x^{-\alpha})^{(m-1)} \prod_{j=1}^{n} x^{-(\alpha+1)}, \quad (31)$$

selanjutnya fungsi *log likelihood* dari persamaan (31) adalah

$$\ln L(\alpha; X_{(m:m)}) = n \ln m + n \ln \alpha + (m-1)\sum_{j=1}^{n} \ln(x^{\alpha} - 1) - \alpha(m-1)\sum_{j=1}^{n} \ln x - (\alpha+1)\sum_{j=1}^{n} \ln x,$$

untuk mendapatkan $\hat{\alpha}_{mle,m}$ melalui metode maksimum *likelihood* dilakukan dengan mencari turunan pertama pada persamaan di atas terhadap α, kemudian disamakan dengan nol sehingga diperoleh

$$\frac{n}{\alpha} + (m-1)\sum_{j=1}^{n} \frac{\ln(x_{(m:m)j})}{(1-x_{(m:m)j}^{-\alpha})} - m\sum_{j=1}^{n} \ln x_{(m:m)j} = 0. \tag{32}$$

Karena solusi $\hat{\alpha}$ dari persamaan di atas tidak bisa diselesaikan dengan pensubstitusian biasa maka bentuk $\frac{\ln(x_{(m:m)j})}{(1-x_{(m:m)j}^{-\alpha})}$ perlu diekspektasikan terhadap fungsi densitasnya [4],[5], sehingga diperoleh

$$E\left(\frac{\ln(x_{(m:m)j})}{(1-x_{(m:m)j}^{-\alpha})}\right) = \frac{m}{\alpha}\sum_{k=0}^{m-2} \frac{(-1)^{(m-2-k)}\binom{m-2}{k}}{(m-k-1)^2}. \tag{33}$$

Misalkan bahwa

$$m\sum_{k=0}^{m-2} \frac{(-1)^{(m-2-k)}\binom{m-2}{k}}{(m-k-1)^2} = b_m,$$

maka persamaan (33) menjadi

$$E\left(\frac{\ln(x_{(m:m)j})}{(1-x_{(m:m)j}^{-\alpha})}\right) = \frac{b_m}{\alpha}, \tag{34}$$

dari persamaan (34) disubstitusikan ke persamaan (32) sehingga diperoleh

$$\frac{n}{\alpha} + \frac{(m-1)}{\alpha}\sum_{j=1}^{n} \mathrm{b_m} - m\sum_{j=1}^{n} \ln x_{(m:m)j} = 0, \tag{35}$$

dari persamaan (35) diperoleh penyelesaian untuk $\hat{\alpha}_{mle,m}$ yaitu

$$\hat{\alpha}_{mle,m} = \frac{n + (m-1)\sum_{i=1}^{n} b_m}{m\sum_{i=1}^{n} \ln x}.$$

Berdasarkan Lehmann [6] Telah dibuktikan bahwa $\hat{\alpha}_{mle,m}$ berdistribusi normal secara asimtotik dengan $N\left(\alpha, [I_{mo}(\alpha)]^{-1}\right)$ atau dinotasikan dengan

$$\sqrt{nI(\alpha)}(\hat{\alpha}_{mle,m} - \alpha) \xrightarrow{d} N(0,1). \tag{36}$$

Sehingga dari persamaan (36) diperoleh taksiran interval dua sisi untuk penaksir $\hat{\alpha}_{mle,m}$ yaitu

$$\left[\hat{\alpha}_{mle,m} - Z_{(\alpha_0/2)}\left(\sqrt{(I_{mo}(\alpha))}\right)^{-1} \leq \alpha \leq \hat{\alpha}_{mle,m} + Z_{(\alpha_0/2)}\left(\sqrt{(I_{mo}(\alpha))}\right)^{-1}\right]. \qquad (37)$$

Jadi persamaan (37) adalah interval kepercayaan untuk α di sekitar $100(1-\alpha_0)\%$.

7. KESIMPULAN

Dari pembahasan sebelumnya dapat diambil kesimpulan bahwa taksiran interval untuk parameter bentuk α dari distribusi Pareto dilakukan dengan menggunakan taksiran titik melalui dua metode yaitu metode momen dan metode maksimum *likelihood* berdasarkan data sampel acak sederhana, statistik berurut minimum dan statistik berurut maksimum, dimana penaksir $\hat{\alpha}_{mom,s}$,$\hat{\alpha}_{mome(1)}$, dan $\hat{\alpha}_{umvue,s}$ menghasilkan penaksir yang tak bias. Sementara $\hat{\alpha}_{mle,s}$, $\hat{\alpha}_{mle(1)}$ dan $\hat{\alpha}_{mle,m}$, merupakan penaksir yang tak bias. Dalam memenuhi Teorema diperoleh penaksir $\hat{\alpha}_{mom,s}$, $\hat{\alpha}_{mome(1)}$, $\hat{\alpha}_{mle,s}$, $\hat{\alpha}_{umvue,s}$, $\hat{\alpha}_{umvue,s}$ dan $\hat{\alpha}_{mle,m}$ yang berdistribusi normal secara asimptotik. Sehingga diperoleh taksiran interval untuk parameter bentuk α dari distribusi Pareto melalui pendekatan distribusi normal berdasarkan sampel acak sederhana, statistik berurut minimum dan statistik berurut maksimum.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Omar, A, K. Ibrahim & A. M. Razali. 2012. Confidence Interval Estimation of The Shape Parameter of Pareto Distribution Using Extreme Order Statistics. *Journal of Mathematics and Statistics,* 6 : 4627-4640.

[2] Bain, L. J & M. Engelhardt. 1993. *Introduction to Probability and Mathematical Statistics. Second Edition*. Duxbury Press. Belmont, California.

[3] Casella, G & R. L. Berger. 1990. *Statistical Inference*. Duxbury Press. Belmont, California.

[4] Dayyeh, W. A., A. Assrhani & K. Ibrahim. 2011. Estimation of The Shape and Scale Parameters of Pareto Distribution Using Ranked Set Sampling. *Statistical Papers*, 54: 1-19.

[5] Dayyeh, W. A & A. S. Esam. 2009. Modified Inference About The Mean of Exponential Distribution Using Moving Extreme Ranked Set Sampling. *Statistical Paper*, 50: 249-259.

[6] Lehmann, E. L & G. Casella. 1983. *Theory of Point Estimation. Second Edition*. Springer Verlag, Inc. New York.

[7] Rytgaard, M. 1990. Estimation in the Pareto Distribution . *Journal of International Actuarial Association,* 20 : 201-215 .