

**PENAKSIR RASIO YANG EFISIEN UNTUK RATA-RATA
POPULASI DENGAN MENGGUNAKAN DUA
VARIABEL TAMBAHAN**

Indah Vilwitri^{1*}, Harison², Haposan Sirait²

¹Mahasiswa Program S1 Matematika

²Dosen Jurusan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Binawidya Pekanbaru, 28293, Indonesia

*indahvilwitri@ymail.com

ABSTRACT

This article discusses four ratio estimators for population mean using two auxiliary variables that are modified using the coefficient of variation and coefficient of kurtosis on simple random sampling. The four estimators are biased estimators and the minimum value of the mean square errors is determined. Furthermore, this minimum value is compared to the minimum value mean square error of each estimator. This comparison shows that the ratio estimator using coefficient of variation and the coefficient of kurtosis is more efficient than the traditional estimator using two auxiliary variables.

Keywords: *ratio estimator, coefficient of variation, coefficient of kurtosis, biased estimator, mean square error*

ABSTRAK

Pada artikel ini dibahas empat penaksir rasio untuk rata-rata populasi dengan menggunakan dua variabel tambahan yang dimodifikasi menggunakan koefisien variasi dan koefisien kurtosis pada sampling acak sederhana. Keempat penaksir merupakan penaksir bias dan ditentukan nilai *mean square error* minimum. Selanjutnya, nilai *mean square error* minimum ini dibandingkan dengan nilai *mean square error* minimum masing-masing penaksir. Perbandingan ini menunjukkan bahwa penaksir rasio menggunakan koefisien variasi dan koefisien kurtosis lebih efisien dari bentuk umum penaksir rasio dengan dua variabel tambahan.

Kata kunci: penaksir rasio, koefisien variasi, koefisien kurtosis, penaksir bias dan *mean square error*

1. PENDAHULUAN

Salah satu cara untuk meningkatkan ketelitian penaksir adalah dengan menggunakan metode penaksir rasio, dengan mengambil manfaat hubungan antara variabel y_i dan variabel tambahan x_i , dimana y_i adalah unit dari populasi variabel Y dan x_i adalah unit dari populasi variabel tambahan X . Penggunaan variabel tambahan dapat meningkatkan ketelitian penaksir. Variabel tambahan yang diketahui untuk meningkatkan ketelitian penaksir yaitu koefisien variasi dan koefisien kurtosis yang berkorelasi dengan variabel Y yang diamati. Penaksir dengan metode rasio merupakan penaksir bias.

Bentuk umum penaksir rasio sederhana untuk rata-rata populasi \bar{Y} dari variabel yang diteliti Y adalah [1: h.173]

$$\hat{Y}_R = \frac{\bar{y}}{\bar{x}} \bar{X},$$

dengan \hat{Y}_R adalah penaksir rasio sederhana untuk rata-rata populasi, \bar{y} dan \bar{x} adalah rata-rata sampel dan \bar{X} adalah rata-rata populasi.

Dalam artikel ini dibahas modifikasi penaksir rasio dengan menggunakan dua variabel tambahan yang diajukan oleh Jingli Lu dan Zaizai Yan [4] menjadi bentuk umum penaksir rasio dengan menggunakan dua variabel tambahan \hat{Y}_{MR} , penaksir rasio dengan menggunakan dua variabel tambahan koefisien variasi \hat{Y}_{pmr1} , penaksir rasio dengan menggunakan dua variabel tambahan koefisien kurtosis \hat{Y}_{pmr2} dan penaksir rasio dengan menggunakan dua variabel tambahan koefisien variasi dan koefisien kurtosis \hat{Y}_{pmr3} . Berdasarkan ide dari Jingli Lu dan Zaizai Yan [4] penulis mendetailkan bias dan *Mean Square Error (MSE)* dari masing-masing penaksir. Selanjutnya penulis membandingkan *MSE* penaksir. Penaksir yang efisien untuk penaksir bias adalah penaksir yang memiliki *MSE* terkecil.

2. SAMPLING ACAK SEDERHANA

Pengambilan sampel acak sederhana merupakan suatu metode untuk mengambil n unit sampel dari N unit populasi, sehingga setiap elemen C_n^N sampel yang berbeda mempunyai kesempatan yang sama untuk dipilih sebagai unit sampel. Pengambilan sampel ini adalah pengambilan sampel acak tanpa pengembalian agar karakteristik unit-unit lebih akurat [2].

Salah satu materi pendukung yang digunakan untuk menentukan penaksir rasio yang efisien untuk rata-rata populasi adalah ekspektasi matematika dan sifat-sifat ekspektasi dari variabel acak.

Definisi 2.1 [1: h. 309] Penaksir $\hat{\theta}^*$ adalah penaksir bias untuk θ . Jika

$$E(\hat{\theta}^*) = \theta + B(\hat{\theta}^*),$$

dengan $B(\hat{\theta}^*)$ adalah bias dari θ .

Untuk pembahasan penaksir pada sampling acak sederhana diberikan teorema mengenai variansi dan kovariansi.

Teorema 2.3 [2: h.27] Apabila sampel berukuran n diambil dari populasi berukuran N yang berkarakter Y , dengan sampling acak sederhana tanpa pengembalian maka variansi rata-rata sampel \bar{y} dinotasikan dengan $V(\bar{y})$ dan dirumuskan sebagai

$$V(\bar{y}) = \frac{S_y^2}{n} \frac{N-n}{N} = \frac{S_y^2}{n} (1-f).$$

Bukti: Bukti dari teorema ini dapat dilihat pada [2: h.27].

Teorema 2.4 [2: h.29] Jika y_i, x_i adalah sebuah pasangan yang bervariasi dalam unit dalam populasi dan \bar{y}, \bar{x} adalah rata-rata dari sampel acak sederhana berukuran n , maka kovariansi adalah

$$Cov(\bar{y}, \bar{x}) = \frac{1-f}{n} \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x}).$$

Bukti: Bukti dari teorema ini dapat dilihat pada [2: h.29].

Definisi 2.2 [3:h.901] Misalkan $\hat{\theta}^*$ adalah penaksir bias untuk $\theta, \forall \theta \in \Omega, \Omega$ merupakan ruang parameter. Rata-rata kesalahan kuadrat dinotasikan dengan $MSE(\hat{\theta}^*)$ yang didefinisikan sebagai

$$MSE(\hat{\theta}^*) = E(\hat{\theta}^* - \theta)^2.$$

3. BIAS DAN MSE PENAKSIR RASIO UNTUK RATA-RATA POPULASI DENGAN MENGGUNAKAN DUA VARIABEL TAMBAHAN

Bentuk umum penaksir rasio dan penaksir rasio yang dimodifikasi dengan menggunakan koefisien variasi C_{x_i} dan koefisien kurtosis $C_2(C_i)$ dengan menggunakan dua variabel tambahan yang diajukan oleh Jinglu Li dan Zaizai Yan [4] yaitu

$$\bar{y}_{MR} = w_1 \bar{y} \frac{\bar{X}_1}{\bar{x}_1} + w_2 \bar{y} \frac{\bar{X}_2}{\bar{x}_2} \tag{1}$$

$$\bar{y}_{pmr1} = w_{11} \bar{y} \frac{\bar{X}_1 + C_{x_1}}{\bar{x}_1 + C_{x_1}} + w_{12} \bar{y} \frac{\bar{X}_2 + C_{x_2}}{\bar{x}_2 + C_{x_2}} \tag{2}$$

$$\bar{y}_{pmr2} = w_{21} \bar{y} \frac{\bar{X}_1 + \beta_2 \bar{C}_1}{\bar{x}_1 + \beta_2 \bar{C}_1} + w_{22} \bar{y} \frac{\bar{X}_1 + \beta_2 \bar{C}_2}{\bar{x}_2 + \beta_2 \bar{C}_2} \quad (3)$$

$$\bar{y}_{pmr3} = w_{31} \bar{y} \frac{\bar{X}_1 \beta_2 \bar{C}_1 + C_{x_1}}{\bar{x}_1 \beta_2 \bar{C}_1 + C_{x_1}} + w_{32} \bar{y} \frac{-\bar{X}_2 \beta_2 \bar{C}_2 + C_{x_2}}{\bar{x}_2 \beta_2 \bar{C}_2 + C_{x_2}} \quad (4)$$

dengan \bar{x}_i dan \bar{X}_i ($i=1,2$) merupakan rata-rata sampel dan rata-rata populasi variabel x_i dan w_{ij} ($i \neq j=1,2,3$) merupakan konstanta atau penimbang yang memenuhi syarat $w_{ii} + w_{jj} = 1$.

Bias dan *MSE* bentuk umum penaksir rasio untuk rata-rata populasi dengan menggunakan dua variabel tambahan pada persamaan (1) adalah

$$B(\bar{y}_{MR}) \approx \frac{1-f}{n} \bar{Y} (w_2 \rho_{y x_2} C_y C_{x_2} - w_1 \rho_{y x_1} C_y C_{x_1})$$

$$MSE(\bar{y}_{MR}) \approx \gamma (C_y^2 - 2w_1 \rho_{y x_1} C_y C_{x_1} - 2w_2 \rho_{y x_2} C_y C_{x_2} + w_1^2 C_{x_1}^2 + 2w_1 w_2 \rho_{x_1 x_2} C_{x_1} C_{x_2} + w_2^2 C_{x_2}^2)$$

dengan $\rho_{y x_i}$ menyatakan koefisien korelasi antara variabel Y dan X_i .

Nilai optimum dari w_1 dan w_2 adalah

$$w_1^* = \frac{C_{x_2}^2 + \rho_{y x_1} C_y C_{x_1} - \rho_{y x_2} C_y C_{x_2} - \rho_{x_1 x_2} C_{x_1} C_{x_2}}{C_{x_1}^2 + C_{x_2}^2 - 2w_1 \rho_{x_1 x_2} C_{x_1} C_{x_2}}$$

dan

$$w_2^* = 1 - w_1^*$$

$$w_2^* = \frac{C_{x_1}^2 - \rho_{x_1 x_2} C_{x_1} C_{x_2} - \rho_{y x_1} C_y C_{x_1} + \rho_{y x_2} C_y C_{x_2}}{C_{x_1}^2 + C_{x_2}^2 - 2\rho_{x_1 x_2} C_{x_1} C_{x_2}}$$

Bias dan *MSE* penaksir rasio untuk rata-rata populasi dengan menggunakan dua variabel tambahan koefisien kurtosis dari persamaan (2) adalah

$$B(\bar{y}_{pmr1}) \approx \frac{1-f}{n} \bar{Y} (w_{12} w_{12} \rho_{y x_2} C_y C_{x_2} - \alpha_{11} w_{11} \rho_{y x_1} C_y C_{x_1})$$

$$MSE(\bar{y}_{pmr1}) \approx \gamma (C_y^2 - 2w_{11} \alpha_{11} \rho_{y x_1} C_y C_{x_1} - 2w_{12} \alpha_{12} \rho_{y x_2} C_y C_{x_2} + w_{11}^2 \alpha_{11}^2 C_{x_1}^2 + 2w_{11} w_{12} \alpha_{11} \alpha_{12} \rho_{x_1 x_2} C_{x_1} C_{x_2} + w_{12}^2 \alpha_{12}^2 C_{x_2}^2)$$

dengan $\alpha_{ij} = \frac{\bar{X}_i}{\bar{X}_i + C_{x_i}}$, untuk $i, j = 1, 2$.

Nilai optimum dari w_{11} dan w_{12} adalah

$$w_{11}^* = \frac{\left(\alpha_{12}^2 C_{x_2}^2 + \alpha_{11} \rho_{y x_1} C_y C_{x_1} - \alpha_{12} \rho_{y x_2} C_y C_{x_2} - \alpha_{11} \alpha_{12} \rho_{x_1 x_2} C_{x_1} C_{x_2} \right)}{\left(\alpha_{11}^2 C_{x_1}^2 + \alpha_{12}^2 C_{x_2}^2 - 2 \alpha_{11} \alpha_{12} \rho_{x_1 x_2} C_{x_1} C_{x_2} \right)}$$

$$w_{12}^* = \frac{\alpha_{12}^2 C_{x_1}^2 - \alpha_{11} \alpha_{12} \rho_{x_1 x_2} C_{x_1} C_{x_2} - \alpha_{11} \rho_{y x_1} C_y C_{x_1} + \alpha_{12} \rho_{y x_2} C_y C_{x_2}}{\alpha_{11}^2 C_{x_1}^2 + \alpha_{12}^2 C_{x_2}^2 - 2 \alpha_{11} \alpha_{12} \rho_{x_1 x_2} C_{x_1} C_{x_2}}$$

Bias dan *MSE* penaksir rasio untuk rata-rata populasi dengan menggunakan dua variabel tambahan menggunakan koefisien kurtosis dari persamaan (3) adalah

$$B_{pmr2} \approx \frac{1-f}{n} \bar{Y} \left(w_{21} \rho_{y x_2} C_y C_{x_2} - \alpha_{22} w_{22} \rho_{y x_1} C_y C_{x_1} \right)$$

$$MSE_{pmr2} \approx \gamma \left(C_y^2 - 2 w_{21} \alpha_{21} \rho_{y x_1} C_y C_{x_1} - 2 w_{22} \alpha_{22} \rho_{y x_2} C_y C_{x_2} + w_{21}^2 \alpha_{21}^2 C_{x_1}^2 + 2 w_{21} w_{22} \alpha_{21} \alpha_{22} \rho_{x_1 x_2} C_{x_1} C_{x_2} + w_{22}^2 \alpha_{22}^2 C_{x_2}^2 \right)$$

dengan $\alpha_{ij} = \frac{\bar{X}_i}{\bar{X}_i + \beta_2 C_{x_i}}$ untuk $i, j = 1, 2$.

Nilai optimum dari w_{21} dan w_{22} adalah

$$w_{21}^* = \frac{\left(\alpha_{22}^2 C_{x_2}^2 + \alpha_{21} \rho_{y x_1} C_y C_{x_1} - \alpha_{22} \rho_{y x_2} C_y C_{x_2} - \alpha_{21} \alpha_{22} \rho_{x_1 x_2} C_{x_1} C_{x_2} \right)}{\left(\alpha_{21}^2 C_{x_1}^2 + \alpha_{22}^2 C_{x_2}^2 - 2 \alpha_{21} \alpha_{22} \rho_{x_1 x_2} C_{x_1} C_{x_2} \right)}$$

dan

$$w_{21}^* = 1 - w_{22}^*$$

$$w_{22}^* = \frac{\alpha_{22}^2 C_{x_1}^2 - \alpha_{21} \alpha_{22} \rho_{x_1 x_2} C_{x_1} C_{x_2} - \alpha_{21} \rho_{y x_1} C_y C_{x_1} + \alpha_{22} \rho_{y x_2} C_y C_{x_2}}{\alpha_{21}^2 C_{x_1}^2 + \alpha_{22}^2 C_{x_2}^2 - 2 \alpha_{21} \alpha_{22} \rho_{x_1 x_2} C_{x_1} C_{x_2}}$$

Bias dan *MSE* penaksir rasio untuk rata-rata populasi dengan menggunakan dua variabel tambahan menggunakan koefisien variasi dan koefisien kurtosis dari persamaan (4) adalah

$$B_{pmr3} \approx \frac{1-f}{n} \bar{Y} \left(w_{32} \rho_{y x_2} C_y C_{x_2} - \alpha_{31} w_{31} \rho_{y x_1} C_y C_{x_1} \right)$$

$$MSE(\bar{y}_{pmr3}) \approx \gamma \left(C_y^2 - 2w_{31}\alpha_{31}\rho_{yx_1}C_yC_{x_1} - 2w_{32}\alpha_{32}\rho_{yx_2}C_yC_{x_2} + w_{31}^2\alpha_{31}^2C_{x_1} + 2w_{31}w_{32}\alpha_{31}\alpha_{32}\rho_{x_1x_2}C_{x_1}C_{x_2} \right)$$

dengan $\alpha_{ij} = \frac{\bar{X}_i\beta_{2i}}{\bar{X}_i\beta_{2i} + C_{x_i}}$, untuk $i, j = 1, 2, 3$.

Nilai optimum untuk w_{31} dan w_{32} adalah

$$w_{31}^* = \frac{C_{32}^2C_{x_2}^2 + \alpha_{31}\rho_{yx_1}C_yC_{x_1} - \alpha_{32}\rho_{yx_2}C_yC_{x_2} - \alpha_{31}\alpha_{32}\rho_{x_1x_2}C_{x_1}C_{x_2}}{C_{31}^2C_{x_1}^2 + \alpha_{32}^2C_{x_2}^2 - 2\alpha_{31}\alpha_{32}\rho_{x_1x_2}C_{x_1}C_{x_2}}$$

dan

$$w_{32}^* = 1 - w_{31}^* = \frac{\alpha_{32}^2C_{x_1}^2 - \alpha_{31}\alpha_{32}\rho_{x_1x_2}C_{x_1}C_{x_2} - \alpha_{31}\rho_{yx_1}C_yC_{x_1} + \alpha_{32}\rho_{yx_2}C_yC_{x_2}}{\alpha_{31}^2C_{x_1}^2 + \alpha_{32}^2C_{x_2}^2 - 2\alpha_{31}\alpha_{32}\rho_{x_1x_2}C_{x_1}C_{x_2}}$$

4. PENAKSIR RASIO YANG EFISIENSI

Untuk menentukan penaksir yang lebih efisien dari penaksir bias, dapat ditentukan dengan cara membandingkan MSE dari masing-masing penaksir. Penaksir yang lebih efisien merupakan penaksir dengan MSE terkecil.

1. Perbandingan $MSE(\bar{y}_{pmr1})$ dengan $MSE(\bar{y}_{MR})$

Penaksir rasio \bar{y}_{pmr1} lebih efisien dari penaksir rasio \bar{y}_{MR} jika

a. Untuk $a > 0$ maka penaksir \bar{y}_{pmr1} akan lebih efisien daripada penaksir \bar{y}_{MR} jika

$$C_{x_{1(2)}} < C_{x_1} < C_{x_{1(1)}}.$$

b. Untuk $a < 0$ maka penaksir \bar{y}_{pmr1} akan lebih efisien daripada penaksir \bar{y}_{MR} jika

$$C_{x_1} < C_{x_{1(1)}} \text{ atau } C_{x_1} > C_{x_{1(2)}}.$$

2. Perbandingan $MSE(\bar{y}_{pmr2})$ dengan $MSE(\bar{y}_{MR})$

Penaksir rasio \bar{y}_{pmr2} lebih efisien dari penaksir rasio \bar{y}_{MR} jika

$$\alpha_{22(2)} < \alpha_{22} < \alpha_{22(1)}.$$

3. Perbandingan $MSE(\bar{y}_{pmr3})$ dengan $MSE(\bar{y}_{MR})$

Penaksir rasio \bar{y}_{pmr3} lebih efisien dari penaksir rasio \bar{y}_{MR} jika

a. Untuk $a > 0$ maka penaksir \bar{y}_{pmr3} akan lebih efisien daripada penaksir \bar{y}_{MR} jika

$$C_{x_2(2)} < C_{x_2} < C_{x_2(1)} .$$

b. Untuk $a < 0$ maka penaksir \bar{y}_{pmr3} akan lebih efisien daripada penaksir \bar{y}_{MR} jika

$$C_{x_2} < C_{x_2(1)} \text{ atau } C_{x_2} > C_{x_2(2)} .$$

4. Perbandingan $MSE(\bar{y}_{pmr1})$ dengan $MSE(\bar{y}_{pmr2})$

Penaksir rasio \bar{y}_{pmr1} lebih efisien dari penaksir rasio \bar{y}_{pmr2} jika

$$\alpha_{22(2)} < \alpha_{22} < \alpha_{22(1)} .$$

5. Perbandingan $MSE(\bar{y}_{pmr1})$ dengan $MSE(\bar{y}_{pmr3})$

penaksir rasio \bar{y}_{pmr1} lebih efisien dari penaksir rasio \bar{y}_{pmr3} jika

a. Untuk $a > 0$ maka penaksir \bar{y}_{pmr1} akan lebih efisien daripada penaksir \bar{y}_{pmr3} jika

$$C_{x_1(2)} < C_{x_1} < C_{x_1(1)} .$$

b. Untuk $a < 0$ maka penaksir \bar{y}_{pmr1} akan lebih efisien daripada penaksir \bar{y}_{pmr3} jika

$$C_{x_1} < C_{x_1(1)} \text{ atau } C_{x_1} > C_{x_1(2)} .$$

6. Perbandingan $MSE(\bar{y}_{pmr2})$ dengan $MSE(\bar{y}_{pmr3})$

Penaksir rasio \bar{y}_{pmr2} lebih efisien dari penaksir rasio \bar{y}_{pmr3} jika

a. Untuk $a > 0$ maka penaksir \bar{y}_{pmr2} akan lebih efisien daripada penaksir \bar{y}_{pmr3} jika

$$C_{x_2(2)} < C_{x_2} < C_{x_2(1)} .$$

b. Untuk $a < 0$, maka penaksir \bar{y}_{pmr2} akan lebih efisien daripada penaksir \bar{y}_{pmr3} jika

$$C_{x_2} < C_{x_2(1)} \text{ atau } C_{x_2} < C_{x_2(2)} .$$

5. KESIMPULAN

Dari pembahasan diatas diperoleh bahwa penaksir rasio yang menggunakan dua variabel tambahan koefisien variasi dan koefisien kurtosis lebih efisien daripada bentuk umum penaksir rasio dengan menggunakan dua variabel tambahan dengan syarat tertentu. Dengan adanya informasi tambahan tersebut sangat mempengaruhi tingkat ketelitian penaksir.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Bain, L. J & M. Engelhardt. 1991. *Introduction to Probability and Mathematical Statistics. Second Edition*. Duxbury Press, California.
- [2] Cochran, W. G. 1991. *Teknik Penarikan Sampel, Edisi Ketiga*. Terj. Dari *Sampling Techniques*, oleh Rudiansyah & E. R Osman. UI Press, Jakarta.
- [3] Gujarati, D. N. 2004. *Basic Econometrics. Fourth Edition*. McGraw Hill pub.Co. New York.
- [4] Lu, J & Z. Yan. 2004. Some Ratio Estimators of a Finite Population Mean Using Two Auxiliary Variables, *Advanced in Biomedical Engineering*, **3-5** : 316-321.