

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
 a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang memperbanyak atau memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun atau dengan cara apapun.



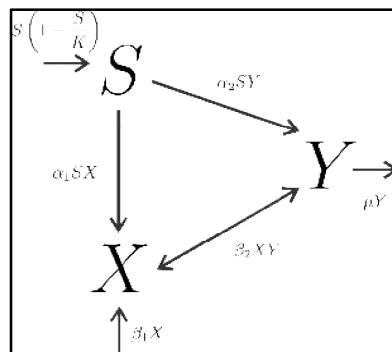
BAB IV

HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

Bab ini menjelaskan tentang hasil - hasil yang diperoleh dalam penelitian. Terdapat dua model yang telah diselesaikan dalam penelitian yang hasilnya telah dipublikasikan dalam bentuk prosiding nasional dan jurnal nasional ber-ISSN tidak terakreditasi.

4.1. Predator-prey dengan infeksi pada populasi mangsa

Misalkan didefinisikan $S(t), X(t), Y(t)$ sebagai jumlah populasi yaitu pemangsa, mangsa sehat, dan mangsa sakit pada suatu wilayah pada waktu t yang diasumsikan membar secara merata. Hubungan antara predator-prey yang melibatkan infeksi pada populasi mangsa ditunjukkan pada Gambar 1.



Gambar 1 Hubungan antara pemangsa dan mangsa dimana terdapat mangsa yang terinfeksi penyakit

Selanjutnya, diasumsikan bahwasanya

1. Pemangsa akan tumbuh secara logistik dengan *carrying capacity* K
2. Pemangsa akan sakit dan mati ketika berinteraksi dengan mangsa yang sakit, dengan laju α_2 .
3. Mangsa saling berinteraksi dengan proporsi intensitas penyebaran infeksi sebesar β_2 .
4. Hanya mangsa sehat yang bisa tumbuh, dengan laju pertumbuhan proporsional sebesar β_1
5. Mangsa sakit akan mati dengan laju proporsional sebesar μ dan akan berkurang sebesar α_2 .

Model matematika yang menggambarkan perilaku predator-prey sesuai skema pada Gambar 1 dan asumsi yang digunakan dapat dinyatakan dalam sistem persamaan



Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:

- Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang memperbanyak atau menyalin sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.

$$\begin{aligned} S' &= S \left(1 - \frac{S}{K} \right) + \alpha_1 SX - \alpha_2 SY \\ X' &= \beta_1 X - \alpha_1 SX - \beta_2 XY \\ Y' &= \beta_2 XY - \alpha_2 SY - \mu Y \end{aligned} \quad (3)$$

dengan $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}^+$ untuk $i = 1, 2$.

Langkah pertama, menentukan titik ekuilibrium dari persamaan (3). Sistem ini memiliki 2^3 kemungkinan titik ekuilibrium. Terdapat beberapa titik ekuilibrium yang tidak bergantung pada nilai parameter dari model ini, diantaranya adalah titik ekuilibrium trivial $E_0(0,0,0)$ dan titik ekuilibrium bebas mangsa $E_1(K, 0, 0)$. Selanjutnya, titik ekuilibrium lain yang bergantung nilai parameter adalah

$$E_2 \left(0, \frac{\mu}{\beta_2}, \frac{\beta_1}{\beta_2} \right), E_3(S^*, X^*, Y^*)$$

dengan S^*, X^*, Y^* diberikan oleh

$$\begin{aligned} S^* &= \frac{K(\mu\alpha_1 - \alpha_2\beta_1 + \beta_2)}{\beta_2} \\ X^* &= \frac{K\mu\alpha_1\alpha_2 - K\alpha_2^2\beta_1 + K\alpha_2\beta_2 + \mu\beta_2}{\beta_2^2} \\ Y^* &= \frac{K\mu\alpha_1^2 - K\alpha_1\alpha_2\beta_1 + K\alpha_1\beta_2 + \beta_1\beta_2}{\beta_2^2} \end{aligned}$$

Langkah kedua, menentukan matriks linearisasi berupa matriks Jacobian. Matriks Jacobian dari persamaan (3) adalah

$$A = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2S}{K} + \alpha_1 X - \alpha_2 X & \alpha_1 S & -\alpha_2 S \\ \alpha_1 X & \alpha_1 S - \beta_2 Y + \beta_1 & -\beta_2 X \\ -\alpha_2 X & \beta_2 Y & -\alpha_2 S + \beta_2 X - \mu \end{pmatrix} \quad (4)$$

Langkah ketiga, menentukan kestabilan lokal masing-masing titik ekuilibrium berdasarkan nilai eigen dari matriks Jacobian pada persamaan (4). Substitusikan titik ekuilibrium E_0 akan menghasilkan persamaan karakteristik



Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:

- Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
- Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.

2. Dilarang mempergunakan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini.

$$\lambda^3 - (-\mu + 1 + \beta_1)\lambda^2 - (\mu\beta_1 + \mu - \beta_1)\lambda + \mu\beta_1 = 0$$

yang dipenuhi oleh nilai eigen $\lambda_0 = \{1, \beta_1, -\mu\}$. Titik ekuilibrium E_0 tidak stabil karena $\beta_1 > 0$. Untuk E_1 dengan proses yang sama, diperoleh persamaan karakteristik yaitu

$$\begin{aligned} &\lambda^3 - (\alpha_1 K - \alpha_2 K - \mu + \beta_1 - 1)\lambda^2 \\ &- (K^2 \alpha_1 \alpha_2 + K \mu \alpha_1 + K \alpha_2 \beta_1 + \alpha_1 K - \alpha_2 K + \mu \beta_1 - \mu + \beta_1)\lambda \\ &- (\alpha_2 K + \mu)(\alpha_1 K + \beta_1) = 0 \end{aligned}$$

yang dipenuhi oleh nilai eigen $\lambda_1 = \{-1, K\alpha_1 + \beta_1, -K\alpha_2 - \mu\}$. Jelas bahwa $K\alpha_1 + \beta_1 > 0$ sehingga titik ekuilibrium E_1 juga tidak stabil.

Selanjutnya, oleh karena model melibatkan enam (6) parameter, akan dilakukan penyederhanaan dengan menentukan nilai beberapa parameter. Jika diinginkan untuk menganalisis hubungan antara pemangsa dan mangsa sakit, maka parameter selain α_1, β_2 akan ditentukan nilainya secara spesifik. Misalkan dipilih $K = 1, \mu = 0.01, \beta_1 = 0.8$ dan $\alpha_1 = 0.005$. Titik ekuilibrium E_2 selanjutnya dapat dituliskan menjadi

$$\left\{ S = 0, X = \frac{0.01}{\beta_2}, Y = \frac{0.8}{\beta_2} \right\}$$

Persamaan karakteristik dari titik ekuilibrium ini adalah

$$\frac{(-\beta_2 - 0.0005 + 0.8\alpha_2 + \lambda\beta_2)(\lambda^2 + 0.008)}{\beta_2} = 0$$

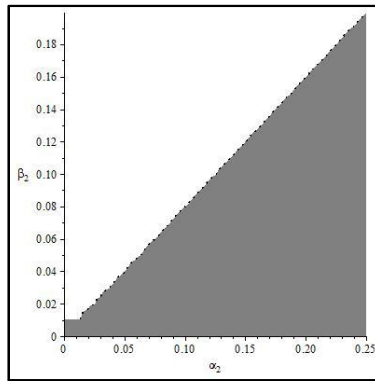
dengan solusinya adalah

$$\left\{ 0.0894I, -0.0894I, 1 - 0.8\frac{\alpha_2}{\beta_2} + \frac{0.0005}{\beta_2} \right\}$$

Kestabilan dari titik ekuilibrium ini ditentukan oleh persamaan $1 - 0.8\frac{\alpha_2}{\beta_2} + \frac{0.0005}{\beta_2}$.

Bidang kestabilan ditunjukkan pada Gambar 2.

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang menggunakan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.

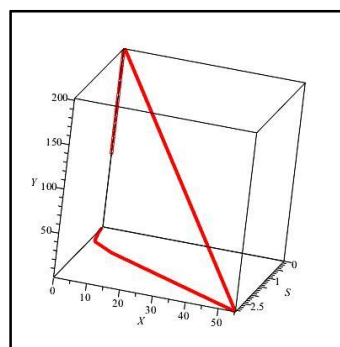


Gambar 2 Daerah kestabilan berdasarkan ketergantungan parameter α_2, β_2 .

Daerah abu-abu adalah daerah yang akan menghasilkan kestabilan bagi titik ekuilibrium, sedangkan daerah putih adalah daerah yang membuat titik ekuilibrium ini tidak stabil.

Untuk simulasi, dipilih $K = 1, \mu = 0.01, \beta_1 = 0.8$ dan $\alpha_1 = 0.05$. Selanjutnya, nilai α_2, β_2 dipilih berdasarkan Gambar 2. Misalkan dipilih $\alpha_2 = 0.2$ dan $\beta_2 = 0.05$ yang terletak di daerah abu-abu atau daerah stabil. Seluruh simulasi diambil dalam jangka waktu $t \in [0, 100]$.

Nilai awal tertentu diperlukan untuk melihat perilaku model ini dalam bentuk bidang fase. Pertama, nilai awal akan dipilih sangat dekat dengan E_0 yaitu $E(0) = \{0.5, 0.05, 0.05\}$. Bidang fase dari nilai awal ini ditunjukkan pada Gambar 3.



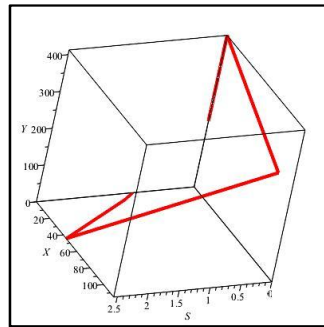
Gambar 3 Ruang fase model pada persamaan (1) dengan nilai awal di sekitar E_0 .

Gambar 3 menunjukkan bahwa populasi akan menjauhi titik $E_1(0)$ walaupun komposisi awal populasi berada di sekitar titik ekuilibrium E_0 .

Nilai awal kedua dipilih di sekitar titik ekuilibrium E_1 yaitu $E(0) = \{1, 0.001, 0.001\}$ dan bidang fase dari nilai awal ini ditunjukkan pada Gambar 4.

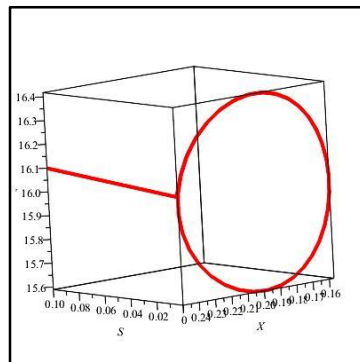
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.



Gambar 4 Ruang fase model pada persamaan (3) dengan nilai awal di sekitar E_1 .

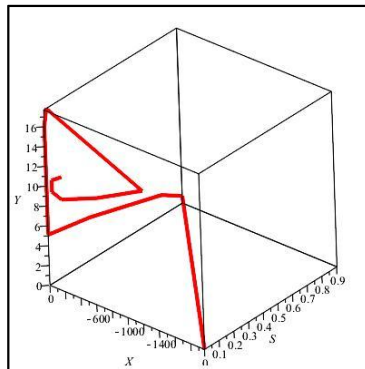
Nilai awal ketiga dipilih di sekitar titik ekuilibrium $E_2 = \{0, 0, 1, 6\}$ yaitu $E(0) = \{0, 0, 1, 0, 2, 1, 1, 6, 0, 1\}$. Bidang fase ditunjukkan pada Gambar 5.



Gambar 5 Ruang fase model pada persamaan (3) dengan nilai awal di sekitar E_2 .

Gambar 5 menunjukkan bahwa dari nilai awal $E_2(0)$ sistem bergerak menuju titik E_2 . Ketika di titik E_2 populasi akan berkembang secara stabil. Terlihat dari gambar populasi membentuk sebuah lingkaran dikarenakan nilai eigen dari E_2 adalah imajiner murni.

Berikutnya, dipilih parameter pada daerah yang mengakibatkan ketidakstabilan pada titik ekuilibrium E_2 . Misalkan dipilih nilai parameter $\alpha_2 = 0,1, \beta_2 = 0,1$. Menggunakan parameter yang baru, diperoleh titik ekuilibrium $E_2 = \{0, 0, 1, 8\}$ dan dipilih nilai awal di sekitar E_2 yaitu $E_2(0) = \{0, 1, 0, 5, 1, 0\}$. Ruang fase untuk model ditunjukkan pada Gambar 6. Pada Gambar 6 terlihat bahwa dari populasi awal, sistem bergerak menjauhi titik ekuilibrium E_2 dan tidak pernah mencapai E_2 sepanjang waktu.



Gambar 6 Ruang fase model pada persamaan (1) dengan nilai awal di sekitar E_2 dengan parameter yang dipilih sedemikian sehingga sistem tidak stabil berdasarkan Gambar 2

4.2. Predator-prey dengan infeksi dan treatment pada mangsa

Misalkan didefinisikan $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ adalah populasi mangsa pada suatu habitat pada waktu t yang terdiri atas mangsa sehat, mangsa terinfeksi dan mangsa terinfeksi yang masuk daerah treatment. Selanjutnya, didefinisikan $p(t)$ sebagai populasi pemangsa pada habitat yang sama dengan populasi mangsa pada waktu t . Hubungan antara mangsa dan pemangsa pada suatu habitat ini diberikan pada Gambar 7.

Asumsi yang digunakan dalam model ini adalah

Hanya mangsa sehat yang dapat tumbuh. Tanpa adanya pemangsa, mangsa sehat tumbuh secara proporsional sebesar a .

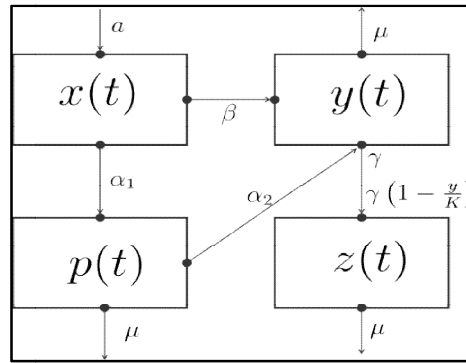
Infeksi antar mangsa terjadi akibat interaksi, jumlahnya sebanding dengan hasil kali jumlah kedua populasi dengan konstanta β . Infeksi akan menyebabkan kematian pada populasi terinfeksi secara proporsional sebesar μ .

Mangsa yang ditreatment tidak bisa dimangsa oleh pemangsa.

Mangsa terinfeksi ditreatment dengan laju proporsional sedangkan populasi infeksi treatment tumbuh secara logistik dengan carrying capacity K . Kegagalan treatment akan mengakibatkan kematian bagi mangsa secara proporsional sebesar b .

Mangsa adalah satu-satunya sumber makanan bagi pemangsa sebagai penunjang kehidupan sehingga tidak adanya mangsa akan mengakibatkan kematian pemangsa sebesar μ sedangkan adanya mangsa mengakibatkan pertumbuhan sebanding dengan jumlah populasi keduanya sebesar α_1 .

Pemangsa yang memangsa mangsa terinfeksi akan mengalami kematian, sebanding dengan jumlah kedua populasi dengan konstanta α_2



Gambar 7 Skema relasi antar populasi mangsa dan pemangsa dalam model

Berdasarkan skema dan asumsi yang digunakan, diperoleh model yang menggambarkan perilaku pemangsa dan mangsa dengan infeksi pada mangsa yaitu

$$\begin{aligned}x' &= ax - \beta xy - \alpha_1 xp \\y' &= \beta xy - \alpha_2 yp - \gamma y - \mu y \\z' &= \gamma y \left(1 - \frac{y}{K}\right) - \mu z \\p' &= -\mu p + \alpha_1 xp - \alpha_2 yp\end{aligned}\quad (5)$$

dengan $x(0) \geq 0, y(0) \geq 0, z(0) \geq 0, p(0) \geq 0$ dan $a, b, \alpha_i, \beta, \theta_i, \gamma, \mu \in \mathbb{R}^+$.

Titik ekuilibrium dari persamaan (5) diberikan oleh $E = (p, x, y, z)$

$$\begin{aligned}E_0 &= \{0, 0, 0, 0\}, \\E_1 &= \left\{ \frac{a}{\alpha_1}, \frac{\mu}{\alpha_1}, 0, 0 \right\} \\E_2 &= \left\{ 0, \frac{\gamma + \mu}{\beta}, \frac{a}{\beta}, \frac{(K\beta - a)\gamma a}{\beta^2 Kc} \right\}\end{aligned}\quad (6)$$

Titik ekuilibrium E_0 merupakan titik ekuilibrium bebas populasi, E_1 adalah titik ekuilibrium bebas infeksi dan E_2 adalah titik ekuilibrium bebas pemangsa. Kestabilan dari masing titik ekuilibrium ini akan diamati secara lokal menggunakan kriteria Routh-Hurwitz

Proposisi 1. Titik ekuilibrium bebas populasi E_0 adalah titik ekuilibrium tidak stabil.

Bukti. Matriks Jacobian dari persamaan (5) diberikan oleh

$$A = (a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4) \quad (7)$$

dengan masing masing komponen $a_i, i = 1, 2, 3, 4$ diberikan oleh



Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:

- Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
- Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.

2. Dilarang mengumumkan atau memperbanyak dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.

$$\begin{aligned} a_1 &= (-\beta y - p\alpha_1 + a \quad \beta y \quad 0 \quad p\alpha_1)^T \\ a_2 &= \left(-\beta x \quad \beta x - p\alpha_2 - \gamma - \mu \quad -\frac{\gamma y}{K} + \left(1 - \frac{y}{K}\right)\gamma \quad -p\alpha_2 \right)^T \\ a_3 &= (0 \quad 0 \quad -c \quad 0)^T \\ a_4 &= (-\alpha_1 x \quad -\alpha_2 y \quad 0 \quad \alpha_1 x - \alpha_2 y - \mu)^T \end{aligned}$$

Jika disubstitusikan nilai E_0 pada persamaan (7) akan diperoleh matriks Jacobian untuk titik ekuilibrium E_0 yaitu

$$A_0 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma - \mu & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & -\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu \end{pmatrix}$$

dengan persamaan karakteristik dari A_0 adalah

$$(\lambda + \mu)^2 (a - \lambda)(\lambda + \gamma + \mu) = 0.$$

Solusi dari persamaan karakteristik adalah

$$\lambda_0 = \begin{pmatrix} -\mu \\ -\mu \\ a \\ -\gamma - \mu \end{pmatrix}$$

Oleh karena terdapat nilai eigen positif, $a > 0$, maka titik ekuilibrium E_0 adalah titik ekuilibrium tidak stabil.

Proposisi 2. Titik ekuilibrium bebas penyakit E_1 adalah titik ekuilibrium yang stabil jika $R_0 < 1$ dengan R_0 didefinisikan dalam bentuk

$$R_0 = \frac{\beta\mu - \mu\alpha_1 - \gamma\alpha_1}{a\alpha_2}$$

Bukti. Jika disubstitusikan nilai E_1 pada persamaan (7) lalu ditentukan persamaan karakteristiknya, akan diperoleh



Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang memperbanyak atau memperjualbelikan atau seluruh atau sebagian dari karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.

$$\begin{aligned} & \lambda^4 + \frac{(a\alpha_2 - \beta\mu + c\alpha_1 + \gamma\alpha_1 + \mu\alpha_1)\lambda^3}{\alpha_1} \\ & + \frac{(aca_2 + a\mu\alpha_1 - \beta c\mu + c\gamma\alpha_1 + c\mu\alpha_1)\lambda^2}{\alpha_1} \\ & + \frac{a\mu(a\alpha_2 - \beta\mu + c\alpha_1 + \gamma\alpha_1 + \mu\alpha_1)\lambda}{\alpha_1} \\ & + \frac{ca\mu(a\alpha_2 - \beta\mu + \gamma\alpha_1 + \mu\alpha_1)}{\alpha_1} = 0 \end{aligned}$$

Solusi dari persamaan karakteristik dipenuhi oleh

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} -\mu \\ \sqrt{-a\mu} \\ -\sqrt{-a\mu} \\ -\frac{a\alpha_2 - \beta\mu + \gamma\alpha_1 + \mu\alpha_1}{\alpha_1} \end{pmatrix}$$

Perhatikan bahwa kestabilan dari E_1 hanya bergantung kepada $\lambda_{1,4}$ karena nilai ini yang belum bisa dipastikan positif atau negatif. Selanjutnya, jika diinginkan sistem stabil maka dari $\lambda_{1,4}$ haruslah memenuhi kondisi

$$\frac{a\alpha_2 - \beta\mu + \gamma\alpha_1 + \mu\alpha_1}{\alpha_1} > 0 \quad (8)$$

Berdasarkan nilai R_0 yang telah didefinisikan, persamaan (8) dapat dituliskan kembali dalam bentuk

$$\frac{a\alpha_2 - R_0 a\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{a\alpha_2}{\alpha_1} (1 - R_0) > 0 \quad (9)$$

Jelas persamaan (9) akan terpenuhi oleh $R_0 < 1$. Jika kondisi pada persamaan (9) telah terpenuhi maka $Re(\lambda_i) \leq 0, i = 1, 2, 3, 4$ sehingga dapat disimpulkan bahwa titik ekuilibrium E_1 stabil dengan $R_0 < 1$. Sistem ini tidak mungkin stabil asimtotik pada titik ini dikarenakan terdapat nilai eigen kompleks yaitu pada titik $\lambda_{2,3}^1 = \pm i\sqrt{a\mu}$.

Proposisi 3. Titik ekuilibrium bebas pemangsa E_2 stabil lokal untuk sebarang nilai R_0 .

Bukti. Substitusikan nilai E_2 pada persamaan (7) akan diperoleh nilai eigen

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mempergunakan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.



$$\lambda_2 = \begin{pmatrix} -\mu \\ \sqrt{-a(\gamma+\mu)} \\ -\sqrt{-a(\gamma+\mu)} \\ \frac{-a\alpha_2 - \beta\mu + \gamma\alpha_1 + \mu\alpha_1}{\beta} \end{pmatrix}$$

Kestabilan sistem di sekitar E_2 hanya dipengaruhi oleh nilai eigen keempat $\lambda_{2,4} = \frac{-a\alpha_2 - \beta\mu + \gamma\alpha_1 + \mu\alpha_1}{\beta}$, yang dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\lambda_{2,4} = \frac{-a\alpha_2}{\beta} (1 + R_0),$$

yang nilainya akan selalu negatif untuk berapapun nilai R_0 .

Simulasi numerik dilakukan dengan menggunakan dua jenis parameter yang ditampilkan pada Tabel 1.

Tabel 1. Nilai parameter untuk simulasi

Parameter	Nilai jenis 1	Nilai jenis 2
a	4	2
b	1	2
α_1	3	1
α_2	3	1
β	1	4
γ	2	2
μ	1	2
K	50	50

Berdasarkan parameter yang dipilih pada jenis pertama, diperoleh titik ekuilibrium yaitu

$$\begin{aligned} E_0 &= \{p = 0, x = 0, y = 0, z = 0\}, \\ E_1 &= \{p = 1.3, x = 0.3, y = 0, z = 0\}, \\ E_2 &= \{p = 0, x = 3, y = 4, z = 7.4\}, \end{aligned}$$

dan berdasarkan parameter jenis kedua diperoleh titik ekuilibrium

$$\begin{aligned} E_0 &= \{p = 0, x = 0, y = 0, z = 0\}, \\ E_1 &= \{p = 2, x = 2, y = 0, z = 0\}, \\ E_2 &= \{p = 0, x = 1, y = 0.5, z = 0.5\}. \end{aligned}$$

Nilai dari parameter jenis pertama pada Tabel 1 akan mengakibatkan nilai $R_0 = -\frac{2}{3} <$

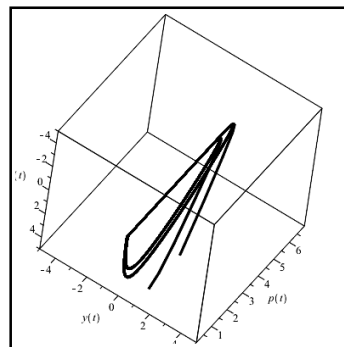
1 sehingga akan menghasilkan sistem yang stabil di sekitar titik ekuilibrium bebas penyakit dan bebas pemangsa. Sedangkan, untuk nilai parameter jenis kedua akan menghasilkan nilai

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang menggunakan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.

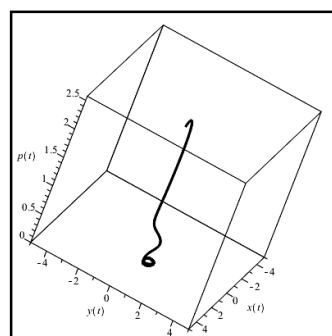


$R_0 = 2 > 1$ yang berarti bahwa sistem tidak stabil di sekitar titik ekuilibrium bebas penyakit dan stabil di sekitar titik ekuilibrium bebas pemangsa.



Gambar 8 Ruang fase model persamaan (5) dengan parameter pada Tabel 1 jenis pertama dengan beberapa nilai awal dengan $t \in [0, 100]$

Gambar 8 menunjukkan bahwa populasi dengan nilai awal yang berbeda terus bergerak mengelilingi titik ekuilibrium bebas penyakit. Kurva tidak menyentuh titik ekuilibrium bebas penyakit E_1 , hanya bergerak mengelilingi dikarenakan nilai eigen yang imajiner murni. Kurva juga selalu menjauhi titik ekuilibrium bebas populasi E_0 sepanjang waktu t .



Gambar 9 Ruang fase model persamaan (5) dengan parameter pada Tabel 1 jenis kedua dengan $t \in [0, 1.000]$ dengan nilai awal di sekitar E_1

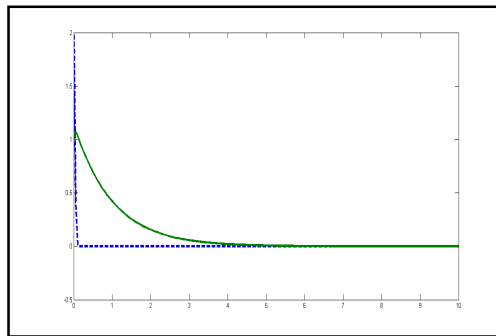
Berdasarkan Proposisi 2 dan Proposisi 3, untuk $R > 1$ maka sistem tidak stabil di titik E_1 dan stabil pada titik E_2 . Gambar 9 dihasilkan dengan nilai awal di sekitar E_1 . Terlihat bahwa perilaku sistem menjauhi nilai awal dan E_1 dan bergerak menuju titik ekuilibrium E_2 dan berputar terus menerus di sekitarnya.

Terakhir, akan dilakukan simulasi dengan menyelesaikan sistem pada persamaan (5) secara numerik dengan menggunakan nilai parameter jenis pertama. Metode yang digunakan dengan metode Euler dengan mengambil nilai awal jauh dari semua titik ekuilibrium. Tujuan

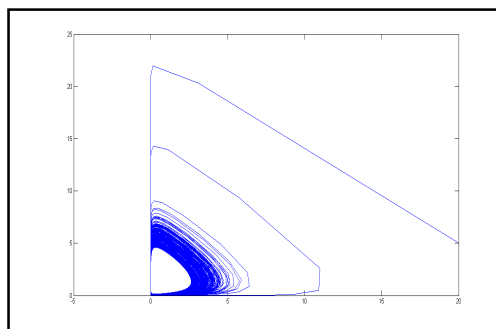
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak atau menyebarluaskan atau sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.



yang ingin dicapai adalah melihat bagaimana perilaku solusi numerik terhadap titik ekuilibrium yang ada.



Gambar 10 Perilaku $y(t), z(t)$ untuk $t \in [0, 10]$ yang diselesaikan secara numerik.



Gambar 11 Perilaku $x(t), p(t)$ untuk $t \in [0, 10,000]$ yang diselesaikan secara numerik.

Hasil simulasi numerik untuk $y(t), z = (t)$ terhadap t ditunjukkan pada Gambar 10.

Gambar 10 menunjukkan bahwa untuk t yang sangat singkat diperoleh bahwa $y(t) = z(t) = 0$ yang bersesuaian dengan E_1 . Selanjutnya, Gambar 11 menunjukkan bahwa sistem bergerak secara kontinu di suatu titik, yang jika disesuaikan dengan penjelasan dari Gambar 10, dapat diprediksi bahwa sistem stabil di sekitar titik E_1 .

4.3. Hasil Dokumen Publikasi

Sesuai dengan luaran yang dijanjikan sesuai dengan edaran pihak LPPM, terdapat beberapa hasil yang telah dihasilkan dari penelitian sampai dengan masa akhir penelitian, yaitu

1. **Pengayaan bahan ajar.** Pengayaan bahan ajar yang dimaksud adalah penambahan materi pada bahan ajar mata kuliah, dalam hal ini adalah mata kuliah Pemodelan Matematika. Sebagai bukti dari luaran ini, dapat dilihat dari RPKPS dan bahan ajar mata kuliah Pemodelan Matematika pada Lampiran.
2. **Prosiding seminar nasional.** Luaran dalam bentuk prosiding yang diseminarkan pada seminar nasional telah dilaksanakan pada BKS-SEMIKATA



Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:

- a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
- b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.

2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.

2017 di Universitas Negeri Jambi pada 12 Mei 2017. Sebagai bukti dari luaran ini, berupa slide seminar, prosiding, sertifikat, dan surat undangan pemakalah pada Lampiran.

3. **Jurnal nasional ber-ISSN tidak terakreditasi.** Untuk luaran jurnal nasional ber ISSN tidak terakreditasi, hasil yang telah diselesaikan adalah jurnal yang disubmit dalam sistem online jurnal dan dalam proses review oleh reviewer jurnal. Jurnal yang dituju adalah jurnal sains dan teknologi UIN Suska Riau. Sebagai bukti dari luaran ini, berupa cetakan jurnal yang disubmit serta halaman author jurnal.