BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1. Model *Predator-Prey*

Model *predator-prey* diperkenalkan oleh Alfred James Lotka dan Vito Volterra [2, h. 545] untuk menggambarkan hubungan interaksi antara dua populasi yang salah satunya bertindak sebagai pemangsa dan yang lainnya sebagai mangsa. Misalkan didefinisikan $x(t), y(t)$ berturut-turut adalah jumlah mangsa dan pemangsa pada suatu daerah pada waktu t. Perubahan jumlah populasi pada masing-masing kelompok dituliskan dalam persamaan

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax - \alpha xy, \\ \frac{dy}{dt} &= by + \beta xy, \end{aligned} \tag{1}$$

dengan $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$. Model pada persamaan (1) menyatakan bahwasanya

1. Jumlah mangsa akan tumbuh secara proporsional sebesar a dan akan berkurang akibat dimakan oleh pemangsa yang bergantung terhadap frekuensi interaksi sebesar α
2. Jumlah pemangsa akan tumbuh secara proporsional sebesar b dan juga tumbuh dikarenakan kecukupan pangan yang sesuai dengan frekuensi interaksi dengan mangsa sebesar β

2.2. Titik Ekuilibrium

Model matematis yang digunakan untuk menggambarkan fenomena di alam seringkali dinyatakan dalam sistem persamaan diferensial nonlinear. Sayangnya, sistem persamaan diferensial nonlinear sangat sulit untuk dianalisis secara analitik. Oleh karena itu, analisis lokal digunakan untuk menganalisis kestabilan di sekitar titik ekuilibrium.

Definisi. [2, h. 509] Misalkan diberikan sistem persamaan diferensial $\vec{y}' = \vec{f}(\vec{y}, t)$ dengan $\vec{y} \in \mathcal{C}^n$ dan $\vec{f} : \mathcal{C}^n \to \mathcal{C}^n$. Titik ekuilibrium $\vec{y}_e$ didefinisikan sebagai titik yang yang mengakibatkan $\vec{f}(\vec{y}_e, t) = \vec{0}$.

Definisi. Misalkan diberikan sistem persamaan diferensial $\vec{y}' = \vec{f}(\vec{y},t)$ dengan $\vec{y} \in \mathcal{C}^n$ dan $\vec{f} : \mathcal{C}^n \to \mathcal{C}^n$ dan diasumsikan sistem memiliki titik ekuilibrium $\vec{y}_e = \vec{0}$. Bentuk linearisasi dari sistem $\vec{y}' = \vec{f}(\vec{y},t)$ dapat dinyatakan dalam bentuk $\vec{y}' = A\vec{y}$ dengan A adalah matriks linearisasi yang dapat dinyatakan dalam bentuk

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial y_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial y_1} & \frac{\partial f_n}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial y_n} \end{pmatrix} \tag{2}$$

yang dievaluasi pada titik ekuilibrium $\vec{y}_e$.

2.3. Kestabilan Routh-Hurwitz

Sistem yang telah dilinearisasi selanjutnya dianalisis sifat kestabilannya di sekitar titik ekuilibrium. Analisis kestabilan digunakan untuk melihat perilaku sistem, menjauhi atau menuju ke titik ekuilibrium. Untuk melakukan hal ini, digunakan kriteri Routh-Hurwitz.

Definisi. [5, h.222] Misalkan diberikan sistem persamaan diferensial biasa $\vec{y}' = A\vec{y}$ dengan $\vec{y} \in \mathcal{C}^n$ dan A adalah matriks linearisasi pada persamaan (2). Misalkan diberikan persamaan karateristik dari matriks A dalam bentuk

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

dengan $a_i \in \mathbb{R}^+, \forall i = 1,2,\ldots,n$ dan $a_0 \neq 0$. Sistem $\vec{y}' = A\vec{y}$ akan stabil jika memenuhi

$$\Delta_1 = a_1 > 0$$

$$\Delta_2 = \det\begin{pmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{pmatrix} > 0$$

$$\vdots$$

$$\Delta_n = \det\begin{pmatrix} a_1 & a_0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_{n-2} \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & \cdots & a_n \end{pmatrix} > 0$$

Jika salah satu koefisien $a_i, i = 1, \ldots, n$ bernilai negatif atau nol maka sistem tidak stabil.

2.4. Solusi Sistem Persamaan Diferensial Linear

Untuk mendapatkan analisis solusi secara eksak untuk tiap waktu pengamatan, maka sistem persamaan diferensial biasa perlu untuk diselesaikan. Misalkan diberikan sistem persamaan diferensial biasa $\vec{y}' = A\vec{y}$ dengan $\vec{y} \in \mathcal{C}^n$. Misalkan nilai eigen dari matriks A adalah $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ dengan vektor eigen dari masing-masing nilai eigen $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$. Solusi sistem persamaan diferensial untuk setiap nilai eigen dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\vec{y}_i = \vec{v}_i e^{\lambda_i t}, \forall i = 1, 2, \ldots, n$$

Solusi umum dari sistem persamaan diferensial selanjutnya dituliskan sebagai kombinasi linear dari masing-masing solusi nilai eigen sehingga akan diperoleh

$$\vec{y}(t) = c_1 \vec{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \vec{v}_2 e^{\lambda_1 t} + \cdots + c_n \vec{v}_n e^{\lambda_n t},$$

dengan $c_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \ldots, n$ adalah suatu konstanta yang diperoleh dari nilai awal sistem yang diberikan.

Untuk mendapatkan solusi khusus, perlu ditentukan nilai dari $c_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \ldots, n$. Misalkan didefinisikan matriks fundamental dalam bentuk

$$M(t) = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 e^{\lambda_1 t} & \vec{v}_2 e^{\lambda_2 t} & \cdots & \vec{v}_n e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

Solusi umum selanjutnya dapat dituliskan dalam bentuk

$$\vec{y}(t) = M(t)\vec{c},$$

dengan $\vec{c} = \langle c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad c_n \rangle$. Untuk $t = 0$ akan diperoleh $\vec{y}(0) = M(0)\vec{c}$. Oleh karena $M(0) = [\vec{v}_1 \quad \vec{v}_2 \quad \cdots \quad \vec{v}_n]$ maka akan diperoleh $\vec{c} = M^{-1}(0)\vec{y}(0)$. Solusi khusus dari sistem dapat dinyatakan sebagai

$$\vec{y}(t) = M(t)M^{-1}(0)\vec{y}(0)$$

2.5. Penelitian yang terdahulu terkait *predator-prey* dengan infeksi pada populasi mangsa

Penelitian mengenai model *predator-prey* dengan melibatkan populasi mangsa yang terinfeksi telah banyak dilakukan sebelumnya. Arino dkk [1] meneliti model *predator-prey* dengan infeksi berupa rasio dengan populasi total dan mengasumsikan hanya populasi sehat yang dapat bereproduksi sedangkan mangsa yang sehat tidak bereproduksi dan tidak bisa sembuh. Hetchcote dkk [2] meneliti model *predator-prey* dengan pertumbuhan logistik dan menggabungkan infeksi dengan pola model SIR (*susceptible, infectible, Recovered*). Kumar dkk [3] meneliti model *predator-prey* dengan studi kasus pada penyebaran *worm*, *trojan horse* dan antivirus di komputer. Worm yang diasumsikan sebagai pemangsa menginfeksi komputer dengan bantuan interaksi perangkat komputer lainnya yang telah terinfeksi. Rahman dkk [4] meneliti model dengan infeksi yang hanya menyebar di populasi mangsa secara bilinear dan mangsa yang terinfeksi tidak mampu untuk sembuh lalu mati. Sani dkk [5] meneliti model penyebaran infeksi pada populasi mangsa dengan pola SIS (*susceptible, infectible, susceptible*) dan mengkaji kestabilannya dengan *next generation matrix (NGM)*. Sinha dkk [6] memodelkan *predator-prey* dengan pertumbuhan logistik pada mangsa dan infeksi pada mangsa dipengaruhi dari lingkungan dengan pola SIS. Sujatha [7] meneliti model *predator-prey* dengan infeksi pola SIS dan mengikutsertakan pemanenan untuk populasi mangsa serta menganalisis kestabilan dengan NGM. Wang [8] meneliti model dengan kondisi infeksi dengan tipe fungsi Holling III. Wuhaib [9] meneliti model dengan infeksi pada mangsa yang melibatkan pemanenan. Populasi mangsa yang terinfeksi mampu untuk sembuh dan menjadi populasi sehat yang dapat terinfeksi kembali. Zhou [10] meneliti model *predator-prey* dengan memberikan modifikasi berupa fungsi respon berupa Leslie-Gower atau Holling tanner.