Analisa Komputasi Metode Dua Langkah Bebas Turunan Untuk Menyelesaikan Persamaan Nonlinear

Supriadi Putra, M.Si

Laboratorium Matematika Terapan
Jurusan Matematika FMIPA Universitas Riau
Kampus Binawidya Universitas Riau – Pekanbaru – Riau – Indonesia, e-mail:sputra@unri.ac.id

Abstrak. Dalam tulisan ini akan dilakukan kajian terhadap metoda dua langkah bebas turunan untuk menyelesaikan persamaan nonlinear yang telah dikembangkan oleh beberapa peneliti sebelumnya. Melalui analisa komputasi, metode-metode ini akan dibandingkan untuk melihat metode yang lebih efisien dan optimal.

Kata Kunci. *Analisa Komputasi, Metoda Iterasi Dua Langkah Bebas Turunan, Persamaan Nonlinear.*

PENDAHULUAN

Menentukan akar dari suatu persamaan nonlinear satu variabel,

$$f(x) = 0, \qquad (1)$$

adalah salah satu topik yang dibahas dalam mata kuliah metode numerik. Permasalahan ini muncul dari berbagai permasalahan di bidang sains dan teknik yang memerlukan penyelesaian secara matematik. Metode analitik yang tersedia dalam menyelesaikan masalah ini sangat terbatas kemampuannya, maka peneliti mengembangkan metode aproksimasi melalui teknik iterasi.

Metode Newton (**MN**) adalah metode yang sangat popular untuk mengaproksimasi akar α dari persamaan nonlinear (1). Dalam penerapannya metode ini memerlukan satu tebakan awal, katakan x_0, dan iterasinya dinyatakan oleh

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0,1,2,\dots \qquad (2)$$

Metode ini merupakan metode iterasi satu langkah dan memiliki orde kekonvergenan kuadratik apabila nilai tebakan awal x_0 diberikan cukup dekat dengan akarnya [1-9]. Kelebihan lainnya adalah metode ini hanya memerlukan dua kali evaluasi fungsi pada setiap iterasinya sehingga indeks efisiensinya [6] adalah sebesar 1.414. Nilai ini sudah optimal dan menjadi acuan pembanding dari metode-metode iterasi lainnya. Untuk dapat diterapkan, metode Newton mensyaratkan bahwa $f'(x_0) \neq 0$ dan ini merupakan suatu kelemahan dari metode Newton.

Untuk memperbaiki kelemahan metode ini, peneliti telah mengembangkan beberapa metode iterasi lain bebas turunan, dua diantaranya yang sangat terkenal adalah metode Secant dan Steffensen.

Metode Secant dikembangkan melalui penggunaan garis secant dan dinyatakan dalam bentuk iterasi

$$x_{n+1} = x_n - \left(\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}\right) f(x_n), \qquad (3)$$

$$n = 1,2,\dots$$

Metode Secant juga memerlukan sekali evaluasi fungsi pada setiap iterasinya (hanya diawal diperlukan dua kali). Akan tetapi karena kekonvergenannya lebih rendah dari metode Newton, yaitu $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ maka indeks efisiensi dari metode ini adalah sebesar 1.272.

Selanjutnya metode bebas turunan lain adalah metode Steffensen yang dikembangkan melalui pendekatan bentuk forward difference untuk mengaproksimasi bentuk turunan

$$f'(x_n) = x_n - \frac{f(x_n + f(x_n)) - f(x_n)}{f(x_n)},$$

sehingga (2) menjadi

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f^2(x_n)}{f(x_n + f(x_n)) - f(x_n)}, \qquad (4)$$

yang dikenal dengan metode Steffensen.

Sama seperti metode Newton, metode Steffensen memiliki orde kekonvergenan kuadratik dan indeks efisiensi yang juga optimal yaitu sebesar 1.414.

Tidak puas dengan hanya melakukan pengembangan terhadap metode iterasi bebas turunan satu langkah seperti di atas, peneliti mulai beralih dalam pengembangan metode iterasi dua langkah. Ide awal diberikan oleh Traub [9], yaitu penggunaan metode newton sebanyak dua kali dengan bentuk iterasi,

$$\left.\begin{aligned} y_n &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\ x_{n+1} &= y_n - \frac{f(y_n)}{f'(y_n)}. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Oleh Traub, metode ini dinamai Predictor-Corrector Newton method (PCN), tetapi dalam paper ini akan disingkat **MN2**. Orde kekonvergenan metode ini adalah empat. Akan tetapi karena pada setiap iterasinya melakukan empat kali evaluasi fungsi, maka metode ini memiliki indeks efisiensi sebesar 1.414 sama dengan metode Newton.

Dalam pengembangan metode iterasi dua langkah, peneliti menggunakan berbagai cara dimana salah satu caranya seperti yang diterapkan dalam pengembangan metode satu langkah sebelumnya, yaitu dengan mencari pendekatan lain sebagai pengganti bentuk turunan.

Dalam paper ini, penulis tertarik mengkaji beberapa hasil temuan peneliti seperti [2,3,4,5,7] dengan cara melakukan analisa komputasinya, khususnya metode iterasi dua langkah bebas turunan.

METODE PENELITIAN

Dalam peper ini dilakukan terlebih dahulu review terhadap beberapa metode iterasi dua langkah bebas turunan yang ada seperti dalam [2,3,4,5,7]. Selanjutnya metode iterasi ini akan dibandingkan melalui teknik komputasi numerik. Dalam hal komputasi, penulis menggunakan bebarapa persamaan nonlinear yang juga digunakan oleh peneliti-peneliti lain sebelumnya dan software Maple untuk membuat programnya. Dengan terlebih dahulu menetapkan tebakan awal, selanjutnya setiap persamaan nonlinear dikomputasi dengan metode-metode itarasi dua langkah bebas turunan yang telah direview sebelumnya. Metode paling efisien akan dinilai dengan melihat banyak iterasi yang dilakukan untuk menemukan akar pendekatan, dan perhitungan orde kekonvergenan. Hasil komputasi akan disajikan dalam bentuk tabel perhitungan dan akan dianalisa untuk mendapatkan kesimpulan yang diharapkan.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Metode-metode iterasi dua langkah bebas turunan yang akan digunakan untuk melakukan komputasi dalam paper ini adalah Metode Jain (**MJa**), Metode Imran et al. (**MIm**), Metode Dehgan-Hajarian (**MDH**), metode Cordero et al. (**MCo**), dan metode Liu et al. (**MLi**).

Jain dalam papernya [5] mempublikasikan metode iterasi dua langkah bebas turunan dengan orde kekonvergenan tiga, melaui ide kombinasi penerapan Metode Secant dan Metode Steffensen (yang diperoleh dengan aproksimasi forward difference untuk turunannnya) yang diberikan oleh persamaan (3) dan (4) yaitu

$$\left.\begin{aligned} y_n &= x_n - \frac{f^2(x_n)}{f(x_n + f(x_n)) - f(x_n)}, \\ x_{n+1} &= x_n - \frac{f^3(x_n)}{[f(x_n + f(x_n)) - f(x_n)][f(x_n) - f(y_n)]}, \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Motode ini melakukan evaluasi fungsi sebanyak tiga kali pada setiap iterasinya sehingga memberikan indeks efisiensi sebesar 1.442.

Imran et al. dalam papernya [4] mempublikasi metode iterasi dua langkah bebas turunan yang diperoleh melalui ide pengaproksimasian bentuk turunan dengan central difference,

$$f'(x_n) = x_n - \frac{f(x_n + f(x_n)) - f(x_n - f(x_n))}{2f(x_n)},$$

sehingga memberikan bentuk iterasi

$$\left.\begin{aligned} y_n &= x_n - \frac{2f^2(x_n)}{f(x_n + f(x_n)) - f(x_n - f(x_n))}, \\ x_{n+1} &= x_n - \frac{2f^3(x_n)}{[f(x_n + f(x_n)) - f(x_n - f(x_n))][f(x_n) - f(y_n)]}, \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Motode ini memiliki orde konvergensi tiga. Akan tetapi metode ini melakukan evaluasi fungsi sebanyak empat kali pada setiap iterasinya sehingga memberikan indeks efisiensi yang lebih kecil yaitu 1.316.

Metode iterasi dua langkah bebas turunan selanjutnya dikembangkan oleh Dehgan dan Hajarian [3] yaitu menggunakan ide penerapan metode Steffensen (4) kedalam metode lain yang diperoleh dari pengembangan metode Newton, sehingga memberikan bentuk iterasi,

$$\left.\begin{aligned} y_n &= x_n - \frac{f^2(x_n)}{f(x_n + f(x_n)) - f(x_n)}, \\ x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n).[f(x_n) + f(y_n)]}{f(x_n + f(x_n)) - f(x_n)}, \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Motode ini juga memiliki orde kekonvergenan tiga dan melakukan evaluasi fungsi sebanyak tiga kali pada setiap iterasinya sehingga memberikan indeks efisiensi sebesar 1.442.

Metode iterasi dua langkah bebas turunan selanjutnya dikembangkan oleh Cordero et al. [2] yang juga menggunakan ide penerapan metode Steffensen(4), sehingga memberikan bentuk iterasi

$$\left.\begin{aligned} y_n &= x_n - \frac{2f^2(x_n)}{f(x_n + f(x_n)) - f(x_n)}, \\ x_{n+1} &= x_n - \frac{2f^2(x_n)}{f(x_n + f(x_n)) - f(x_n - f(x_n))} \\ &\quad \cdot \frac{f(y_n) - f(x_n)}{2f(y_n) - f(x_n)}, \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Motode ini memiliki orde kekonvergenan yang lebih tinggi yaitu empat. Akan tetapi metode ini melakukan evaluasi fungsi sebanyak empat kali pada setiap iterasinya sehingga memberikan indeks efisiensi yang lebih kecil dari sebelumnya yaitu sebesar 1.414.

Selanjutnya metode yang dikembangkan oleh Liu et al. [7]. Ide pengembangan metode ini adalah penerapan metode Steffensen (4) dan devide difference sehingga memberikan bentuk iterasi

$$\left.\begin{aligned} y_n &= x_n - \frac{f^2(x_n)}{f(x_n + f(x_n)) - f(x_n)}, \\ x_{n+1} &= x_n - \frac{f[x_n, y_n] - f[y_n, z_n] + f[x_n, z_n]}{f^2[x_n, y_n]} . f(y_n), \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

dimana $z_n = x_n + f(x_n)$. Dalam metode ini, $f[x_n, y_n]$, $f[y_n, z_n]$, dan $f[x_n, z_n]$ adalah beda terbagi dari $f(x)$ dan didefinisikan sebagai

$$f[x_n, y_n] = \frac{f(x_n) - f(y_n)}{x_n - y_n},$$

$$f[y_n, z_n] = \frac{f(y_n) - f(z_n)}{y_n - z_n}, \text{ dan}$$

$$f[x_n, z_n] = \frac{f(x_n) - f(z_n)}{x_n - z_n}.$$

Motode ini memiliki orde kekonvergenan empat. Karena hanya melakukan evaluasi fungsi sebanyak tiga kali pada setiap iterasinya sehingga memberikan indeks efisiensi yang lebih tinggi yaitu sebesar 1.587.

PERBANDINGAN KOMPUTASI

Pada bagian ini akan dilakukan perbandingan komputasi terhadap metode-metode yang telah dijelaskan, yaitu : Metode Newton (**MN**), metode Newton Predictor-Corrector (**MN2**), Metode Jain (**MJa**), Metode Imran et al. (**MIm**), metode Dehgan-Hajarian (**MDH**), metode Cordero et al. (**MCo**), dan metode Liu et al. (**MLi**). Pada setiap metode akan diperhatikan banyak iterasi yang diperoleh untuk tingkat keakuratan yang diberikan dan orde perhitungan komputasi (COC).

Dalam hal komputasi, iterasi akan berhenti apabila salah satu dari kriteria berikut terpenuhi :

(a) $f'(x_0) = 0$ hanya untuk **MN** dan **MN2**
(b) maksimum iterasi = 100
(c) apabila $|f(x_{n+1})| < toleransi$
(d) apabila $|x_{n+1} - x_n| < toleransi$.

dimana nilai *toleransi* yang digunakan adalah sebesar 10^{-15}.

Sedangkan fungsi yang digunakan adalah adalah fungsi yang sudah teruji bagus untuk melihat ketangguhan suatu metode. Dalam hal ini fungsi pertama dan kedua disingkat : f_1 dan f_2 diambil dari [8].

$$f_1(x) = x^4 - 3x^3 - 54x^2 - 150x - 100, \quad \alpha = -1.0$$
$$f_2(x) = 0.5 + \sin(x), \; \alpha = 0.523598775598299$$
$$f_3(x) = xe^{-x} - 0.1, \quad \alpha = 0.111832559158963$$
$$f_4(x) = e^{-x} + \sin(x) - 1, \; \alpha = 2.076831274533113.$$

Dalam TABEL 1, Div berarti metode tidak konvergen ke akar yang diberikan, tanda * berarti metode konvergen tetapi ke akar lain.

Dari tabel hasil komputasi, baik **MN** maupun **MN2** memiliki karakteristik yang sama dalam menemukan aproksimasi akarnya akan tetapi banyak iterasi yang diberikan oleh **MN2** lebih sedikit. Untuk keseluruhan fungsi, **MJa** dan **MLi** dapat menemukan semua akar dari persamaan nonlinear meskipun ada yang tidak sesuai dengan akar yang diharapkan. Menurut analisa penulis, metode ini sangat layak untuk dipilih dan digunakan. **MIm** cukup bagus dalam menemukan akar, akan tetapi tidak lebih baik dibandingkan **MJa**. Diantara metode iterasi dua langkah bebas turunan yang dibandingkan, **MDH** dan **MCo** adalah metode yang tidak direkomendasikan untuk digunakan meskipun **MCo** memiliki orde konvergensi empat akan tetapi indeks efisiensinya hanya 1.414.

TABEL 1 Perbandingan banyak iterasi dan COC dari metode-metode yang dibahas.

f_i	x_0	Banyak iterasi							COC						
		MN	MN2	MJa	MIm	MDH	MCo	MLi	MN	MN2	MJa	MIm	MDH	MCo	MLi
f_1	-1.9	9	5	8	8	Div	Div	7	2.00	4.00	3.00	3.00	-	-	4.08
	-1.6	7	4	5	6	Div	Div	6	2.00	4.00	3.00	3.00	-	-	4.00
	-1.2	5	3	4	4	9	Div	4	2.00	4.00	3.00	3.01	3.00	-	4.00
	-0.4	6	3	5	5	Div	Div	5	2.00	4.00	3.00	3.00	-	-	4.00
	0.0	6	3	5	5	Div	Div	5	2.00	3.99	2.71	3.04	-	-	4.00
f_2	-1.0	7*	4*	3	4*	3	4*	2	2.00	4.00	3.00	3.00	3.00	3.99	3.49
	-0.5	5	3	3	3	3	3	2	2.00	4.00	3.00	3.02	3.00	4.02	3.55
	0.0	4	2	3	3	3	2	2	2.00	3.70	3.00	3.00	3.00	3.53	3.73
	1.0	5	3	3	3	3	3	3	2.00	4.00	3.00	3.01	3.00	4.00	4.00
	1.5	5*	3*	4	5*	7*	4*	3	2.00	4.00	3.00	3.00	3.00	4.00	3.78
f_3	-2.0	9	5	7	7	Div	Div	6	2.00	4.00	3.00	3.00	-	-	4.00
	-1.0	7	4	5	5	9	Div	4	2.00	4.00	3.00	3.00	3.00	-	3.97
	0.0	7	2	3	3	3	2	3	2.00	3.96	3.00	3.00	3.00	3.88	4.00
	1.0	Div	Div	5*	Div	Div	2*	8	-	-	3.00	-	-	4.00	3.99
	2.0	5*	3*	4*	4*	4*	3*	3*	2.00	4.00	3.00	3.00	3.00	4.00	4.00
f_4	1.0	24*	12*	4	17*	19*	14*	6*	1.00	1.00	3.00	1.00	1.00	1.00	3.99
	1.5	6	3	4	4	10*	4	3	2.00	3.94	3.00	3.00	3.00	4.00	3.90
	3.0	5	3	3	3	3	3	3	2.00	4.00	3.00	3.00	3.00	4.00	4.00
	4.0	29*	15*	3	15*	3	13*	3	1.00	1.00	3.00	1.00	2.99	1.00	4.00
	5.0	14*	14*	4	20*	4	10*	4	1.00	1.00	3.00	2.91	3.00	3.76	4.00

KESIMPULAN

Berdasarkan analisa komputasi dari metode iterasi dua langkah bebas turunan yang telah dilakukan, penulis berkesimpulan bahwa metode Jain (**MJa**) dan Liu (**MLi**) adalah metode yang efisien dan optimal untuk digunakan dalam mencari akar persamaan nonlinear.

UCAPAN TERIMA KASIH

Ucapan terima kasih dalam hal ini penulis sampaikan kepada jurusan dan fakultas yang telah memberikan dukungan dana sehingga penulis dapat mengikuti acara ini.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Atkinson. K.E. (1989), *An Introduction to Numerical Analysis*, second ed., John Wiley & Sons, New York.

[2] Cordero, A., Hueso, J.L., Martinez, E., Torregrosa, J.R. (2011). Steffensen type methods for solving nonlinear equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, doi:10.1016/j.cam.2010.08.043.

[3] Dehghan, M., Hajarian, M. (2010). Some derivative free quadratic and cubic convergence iterative formulas for solving nonlinear equations. *Computational and Applied Mathematics*, 29, 19-31.

[4] Imran, M., Agusni, A. Karma, S. Putra. (2012). Two Step Methods Without Employing Derivatives for Solving a Nonlinear Equation, *Bulletin of Mathematics*, Vol.04, No.01, 59-65.

[5] Jain, P. (2007). Steffensen type methods for solving non-linear equations. *Applied Mathematics and Computation*, 194, 527-533.

[6] Kung, H. T., Traub. J. F. (1974). Optimal order of one-point and multipoint iteration, *J. Assoc. Comput*. Mach., 21, 643-651.

[7] Liu, Z., Q. Zheng and P. Zhao, 2010. A variant of Steffensen's method of fourth-order convergence and its applications. Appl. Math. Comput., 216: 1978-1983.

[8] Nerinckx, D. and Haegenans, D. (1976). A Comparison of Nonlinear Equation Solver. *J. Comput. Appl. Math*. 2. 145-148.

[9] Traub, J.F. (1964). *Iterative Methods for the Solution of Equations*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.