BEBERAPA MODIFIKASI METODE NEWTON RAPHSON UNTUK MENYELESAIKAN MASALAH AKAR GANDA§

Supriadi Putra, M,Si

Laboratorium Komputasi Numerik Jurusan Matematika
Fakultas Matematika & Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Binawidya Pekanbaru (28293)
sputra@unri.ac.id

ABSTRAK

Dalam makalah ini akan dijelaskan beberapa bentuk Metode Newton Raphson untuk menyelesaikan masalah akar ganda. Dengan melakukan simulasi numerik, akan dibandingkan hasil komputasi dari Metode Newton-Raphson (standar) dengan modifikasi Metode Newton-Raphson untuk asumsi multiplisitas akar diketahui dan tidak diketahui.

Kata kunci : *Metode Newton-Raphson, akar ganda, multiplisitas, konvergen linier, konvergen kuadratik.*

PENDAHUHLUAN

Metode Newton Raphson (juga dikenal dengan Metoda Newton) adalah mentode untuk mencari akar persamaan non-linear apabila suatu nilai awalnya diberikan. Metode ini pada prinsipnya menggunakan garis tangen. Dalam perkuliahan numerik (metoda ataupun analisis) untuk tingkat sarjana, metoda ini merupakan metoda utama yang sebaiknya diberikan sebagai materi perkuliahan. Selain dapat menyelesaikan akar real, metoda ini juga bisa digunakan untuk akar kompleks ataupun pada sistem persamaan linear. Dengan beberapa alasan ini penulis akan mencoba menjelaskan beberapa modifikasi dari Metoda Newton-Raphson ini khusus untuk menyelesaikan permasalahan akar ganda. Tulisan ini bersumber pada paper dengan judul *An Improved Newton's Method* yang ditulis oleh Mathews [3].

Dalam penerapannya, formula iterasi Newton-Raphson memanfaatkan rumus Ekspansi Taylor. Misalnya untuk mencari akar-akar dari persamaan $f(x)=0$, formula iterasi Newton-Raphson dituliskan sebagai :

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}. \tag{1}$$

Diberikan nilai awal p_0, maka barisan $\{p_k\}$ dapat dihitung dengan menggunakan :

$$p_k = g(p_k) \text{ untuk } k = 0,1,2,\cdots \text{(dipenuhi untuk } f'(p_k) \neq 0). \tag{2}$$

----

§ Disampaikan pada SEMIRATA BKS PTN Wilayah Barat, FST UIN Syarif Hidayatullah Jakarta, Juli 2007

Repository University Of Riau
PERPUSTAKAAN UNIVERSITAS RIAU
http://repository.unri.ac.id/

Jika nilai awal p_0, cukup dekat dengan p, barisan yang dibangun dengan menggunakan persamaan (2) akan konvergen ke akar p. Kadang kala kecepatan kekonvergenan barisan $\{p_k\}$ cepat (kuadratik) akan tetapi terkadang lambat (liniar). Untuk membedakan kedua kasus ini, berikut akan diberikan dua buah definisi.

Definisi 1.

Misalkan $\{p_k\}$ adalah barisan yang konvergen ke- p, dan tetapkan $e_k = p - p_k$ untuk $k = 0,1,2,\ldots$. Jika terdapat suatu konstanta $A \neq 0$ sedemikan hingga

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^2} = A, \tag{3}$$

maka barisan dikatakan konvergen kuadtrik ke-p. Jika terdapat suatu konstanta $A \neq 0$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|} = A, \tag{4}$$

maka barisan dikatakan konvergen liniear.

Kasus mana yang sedang akan dikerjakan disini adalah berhubung dengan multiplisitas dari akar p.

Definisi 2.

Jika $f(x)$ dapat difaktorkan sebagai

$$f(x) = (x-p)^M h(x), \text{ ,dimana } M \text{ adalah bilangan bulat positif,} \tag{5}$$

dan $h(x)$ kontinu pada $x = p$ dan $h(p) \neq 0$, maka dapat dikatakan bahwa $f(x)$ mempunyai derajat akar M pada $x = p$.

Derajat akar $M=1$ dikenal dengan istilah akar sederhana, sedangkan untuk $M > 1$ disebut akar ganda. Hasil-hasil berikut sudah sangat dikenal dan dapat ditemukan dalam referensi tulisan ini.

BEBERAPA MODIFIKASI METODE NEWTON-RAPHSON

Teorema1. [Derajat kekonvergenan Metode Newton-Raphson]

Misalkan barisan $\{p_k\}$ yang dihasilkan dari persamaan (2) konvergen ke akar p. Jika p adalah akar sederhana, maka kekonvergenannya adalah kuadratik dan

Repository University Of Riau
PERPUSTAKAAN UNIVERSITAS RIAU
http://repository.unri.ac.id/

$$|e_{k+1}| \approx \frac{|f''(p)|}{2|f'(p)|}|e_k|^2, \text{ untuk nilai } k \text{ yang cukup besar} \tag{6}$$

Jika p berderajat M, kekonvergenan akan linier dan

$$|e_{k+1}| \approx \frac{M-1}{M} p_k, \text{ untuk nilai } k \text{ yang cukup besar} \tag{7}$$

Ada dua cara untuk menggunakan Teorema 1 dan menjelaskan kekonvergenan kuadratik pada kasus angka ganda, sebut saja misalnya Metoda A dan B.

Metoda A.

Misalkan p adalah akar dengan derajat $M > 1$. Maka Formula Percepatan Newton-Raphson dituliskan sebagai :

$$g(x) = x - M\frac{f(x)}{f'(x)}. \tag{8}$$

Misalkan diambil nilai awal p_0 yang sangat dekat dengan p, dan hitung secara iteratif barisan $\{p_k\}$ menggunakan formula

$$p_{k+1} = p_k - M\frac{f(p_k)}{f'(p_k)}, \text{untuk } k = 0,1,2,\ldots \tag{9}$$

Maka barisan yang dibangun oleh persamaan (9) akan konvergen secara kuadratik ke p.

Selain dari pada itu, jika $f(x) = (x-p)^M h(x)$, maka akan dapat ditunjukkan bahwa fungsi $u(x) = f(x)/f'(x)$ mempunyai akar yang sederhana pada $x = p$. Dengan menggunakan $u(x)$ sebagai pengganti tempat $f(x)$ pada persamaan (1) akan memberikan penjelasan **Metoda B** berikut.

Metoda B.

Misalkan p adalah akar dengan derajat $M > 1$. Maka Formula Percepatan Newton-Raphson dituliskan sebagai :

$$g(x) = x - \frac{f(x)f'(x)}{[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)}. \tag{10}$$

Misalkan diambil nilai awal p_0 yang sangat dekat dengan p, dan hitung secara iteratif barisan $\{p_k\}$ menggunakan formula :

$$p_{k+1} = p_k - \frac{f(p_k)f'(p_k)}{[f'(p_k)]^2 - f'(p_k)f''(p_k)}, \text{untuk } k = 0,1,2,\ldots \tag{11}$$

Repository University Of Riau
PERPUSTAKAAN UNIVERSITAS RIAU
http://repository.unri.ac.id/

maka barisan yang dibangun oleh persamaan (11) akan konvergen secara kuadratik ke *p*.

Kelemahan Metode A dan B.

Dalam penerapannya, Metode A mempunyai kelemahan dimana kita harus mengetahui derajat M dari akar persamaan. Menentukan nilai M akan relatif sulit sebab analisis matematika harus digunakan. Hal ini juga sering dilakukan dengan menentukan turuan tingkat tinggi dari $f(x)$. Dimana, $f(x) = 0$ memiliki akar derajat M pada $x = p$ jika dan hanya jika

$$f(p)=0, f'(p)=0, f''(p)=0,\cdots, f^{(M-1)}(p)=0, f^{(M)}(p)\neq 0. \tag{12}$$

Rice (1983, pp. 232-233) menyarankan cara mencari pendekatan M. Jika p^* adalah pendekatan yang baik untuk p dan p_1 dan p_2 berderajat cukup dekat dengan p^* maka M dapat ditentukan dengan nilai pendekatan :

$$M \approx \frac{\ln(f(p_1)/f(p_2))}{\ln(f(p_1-p^*)/f(p_2-p^*))}. \tag{13}$$

Metoda B mempunyai kelemahan karena melibatkan tiga fungsi $f(x)$, $f'(x)$ dan $f''(x)$. Akibatnya tentu saja membutuhkan komputasi yang cukup mahal. Selain dari pada itu mungkin akan terjadi bahwa $u(x)$ bukan merupakan fungsi yang kontinu.

Metoda C.

Metoda berikut merupakan modifikasi lain Metoda Newton-Raphson yaitu pemakaian secara bersamaan Metoda Pencarian Linier dengan Metoda Percepatan Newton-Raphson seperti diberikan oleh persamaan (8). Nilai berikut dapat dihitung dengan menggunakan

$$p_j = p_0 - M\frac{f(p_0)}{f'(p_0)}, \text{untuk } \; j=1,2,\ldots,M \tag{13}$$

Selanjutnya akan dijelaskan nilai M yang digunakan dalam persamaan (13), karena nilai ini bagian penting yang belum diketahui. Langkah pertama adalah dengan mengambil turunan $f(x)$ yang terdapat dalam persamaan (8).

$$f'(x) = (x-p)^M h'(x) + M(x-p)^{M-1} h'(x). \tag{14}$$

apabila persamaan (5) dan (14) disubstitusikan pada persamaan (1) akan diperoleh

$$g(x) = x - \frac{1}{M}(x-p)\frac{1}{\dfrac{1+(x-p)h'(x)}{Mh(x)}}.$$

Hal ini memungkinkan untuk menuliskan kembali persamaan (13) menjadi

Repository University Of Riau
PERPUSTAKAAN UNIVERSITAS RIAU
http://repository.unri.ac.id/

$$p_j = p_0 - \frac{j}{M}(p_0 - p)\frac{1}{\frac{1+(p_0 - p)h'(p_0)}{Mh(p_0)}} \tag{15}$$

Dengan asumsi bahwa nilai awal p_0 sangat dekat dengan p, maka akan diperoleh

$$\frac{1}{\frac{1+(p_0 - p)h'(p_0)}{Mh(p_0)}} = 1+\varepsilon, \text{dimana } \varepsilon \approx 0. \tag{16}$$

Iterasi p_j pada persamaan (15) memenuhi

$$p_j = p_0 - \frac{j}{M}(p_0 - p)(1+\varepsilon), \text{ untuk } j = 1,2,\ldots \tag{17}$$

Jika kedua ruas persamaan (17) dikurangkan dengan p, maka akan diperoleh sebagai berikut

$$p_j - p = \left(\left(1 - \frac{j}{M}\right) - \frac{j\varepsilon}{M}\right)(p_j - p). \tag{18}$$

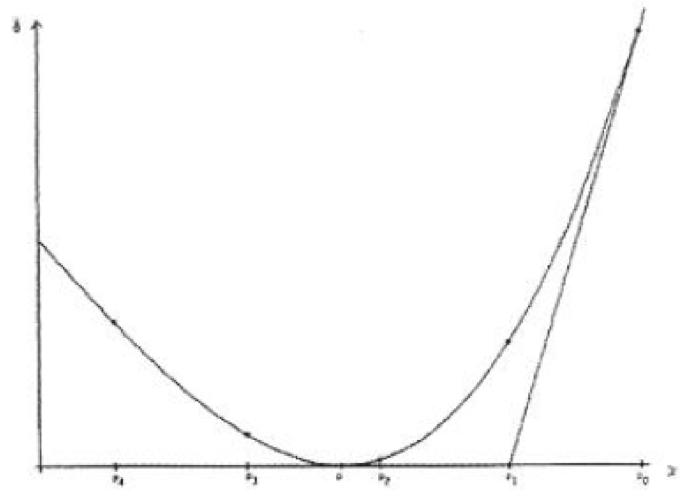
Karena $j\varepsilon / M \approx 0$, dan nilai iterasi p_j akan dekat dengan p apabila j bergerak dari 1 menuju M, yang dapat dinyatakan sebagai

$$|p_0 - p| > |p_1 - p| > \cdots > |p_j - p| > \cdots |p_M - p| \tag{19}$$

Nilai p seperti yang diperlihatkan pada gambar 1. Yang perlu dicatat juga adalah jika iterasi pada persamaan (15) kontinu untuk M+1 dan M+2, maka $|f(p_{M+1})|$ dan $|f(p_{M+2})|$ akan lebih besar dari $|f(p_M)|$. Kenyataan ini dapat dibuktikan dengan menggunakan turunan pada persamaan (12) dan approksimasi Teorema Taylor berderajat M untuk $f(x)$ yang diekspansikan sekitar $x = p$ yaitu

$$f(x) = \frac{f^{(M)}(p)}{M!}(x-p)^M. \tag{20}$$

Repository University Of Riau
PERPUSTAKAAN UNIVERSITAS RIAU
http://repository.unri.ac.id/



Gambar 1.

Nilai p_1, p_2, p_3 dan p_4 diperoleh dengan menggunakan persamaan (15) yang dekat dengan akar p berderajat $M = 2$. Dalam hal ini $|f(p_3)| > |f(p_2)|$.

Jika p_j lebih dekat dengan p dari pada p_i maka persamaan (19) dan (20) memberikan implikasi $|f(p_j)| < |f(p_i)|$,sehingga diperoleh :

$$|f(p_0)| > |f(p_1)| > \cdots > |f(p_j)| > \cdots |f(p_M)| \tag{21}$$

Oleh karena itu cara untuk menjelaskan nilai M akan berhasil sama seperti keberhasilan yang diperoleh dengan perhitungan nilai p_j menggunakan persamaan (13) untuk $j = 1,2,\ldots,M+1$ sampai dipenuhi kondisi $|f(p_M)| < |f(p_{M+1})|$

Algoritma Metoda C.

1. Misalkan p_0 adalah nilai awal
2. Nilai pendekatan p_j, untuk $j = 1,2,\ldots$ dapat dihitung dengan cara :

$$Dx = \frac{f(p_0)}{f'(p_0)}$$

$p_1 = p_0 - Dx$ dan $y_1 = f(p_1)$

$p_2 = p_0 - 2Dx$ dan $y_2 = f(p_2)$

$j = 3$

WHILE $|y_2| < |y_1|$ DO

  $p_1 := p_2$

  $y_1 := y_2$

  $p_2 := p_0 - jDx$

  $y_2 = f(p_2)$

  $j := j + 1$

END-WHILE

Repository University Of Riau
PERPUSTAKAAN UNIVERSITAS RIAU
http://repository.unri.ac.id/

Perhatikan bahwa algoritma di atas merupakan Metoda Pencarian Linier pada interval $(-\infty, p_0)$ apabila $p_1 < p_0$ atau interval (p_o, ∞) apabila $p_o < p_1$. Dalam algoritma ini, nilai $Dx = f(p_o) / f'(p_o)$ diberikan sehingga perhitungan yang tidak perlu bisa dihindarkan. Setelah titik $(p_1, f(p_1))$ ditemukan, maka nilainya akan langsung menggantikan $(p_o, f(p_o))$ dan proses diulang kembali.

SIMULASI NUMERIK

Simulasi numerik disini menggunakan compiler Borland Turbo C++ versi 4.5 yang dijalankan pada Notebook berporcessor AMD Turion64 dengan speed 2.0 GHz serta memori 512 MB DDR2.

Contoh.

Dengan menggunakan nilai awal p_o=1.3 bandingkan hasil yang diperoleh dari Metoda A,B dan C untuk mencari akar ganda $p = 1$ dari persamaan $x^3 - 3x + 2 = 0$.

Penyelesaian :

Tuliskan persamaan di atas dalam notasi fungsi $f(x) = x^3 - 3x + 2$. Dengan menurunkan $f(x)$ kita peroleh $f'(x) = 3x^2 - 3$ dan $f''(x) = 6x$. Dengan menerapkan metoda A, B dan C akan diperoleh hasil seperti yang diberikan oleh tabel berikut. Khusus untuk mentoda C semua nilai dalam pencarian linier sudah termasuk.

Iterasi	Metode Newton-Raphson Persamaan (2)	Metode A dengan M=2 Persamaan (9)	Metoda B Persamaan (11)	Metoda C (Algoritma)
k	p_k	p_k	p_k	p_k
0	1.300000000000	1.300000000000	1.300000000000	1.300000000000
1	1.156521739130	1.013043478261	0.987654320988	1.156521739130
2	1.080154277700	1.000028171659	0.999974387214	1.013043478261
3	1.040591901008	1.000000000132	0.999999999891	1.006535824960
4	1.020430527668			1.000028171659
5	1.010249695972			1.000014085896
6	1.005133558038			1.000000000132
⋮	⋮			
29	1.000000000607			
30	1.000000000309			
31	1.000000000133			

Repository University Of Riau
PERPUSTAKAAN UNIVERSITAS RIAU
http://repository.unri.ac.id/

Analisa

Dari hasil perhitungan ini dapat dilihat bahwa metoda Newton-Raphson standar konvergen secara linier sedangkan Metoda A dan B konvergen secara kuadratik. Dengan menggunakan persamaan (12) dapat dilihat bahwa nilai $M = 2$ adalah orde dari akar $p = 1$. Untuk contoh di atas, rumus perhitungan $g(x)$ dalam metoda B :

$$g(x) = x - \frac{(x^3 - 3x + 2)(3x^2 - 3)}{(3x^2 - 3)^2 - (x^3 - 3x + 2)(6x)}.$$

Dalam tabel di atas terlihat juga bahwa semua iterasi dalam Metoda A muncul pada Metoda C, oleh karenanya subbarisan $\{p_{2k}\}$ dalam metoda C konvergen secara kuadratik. Hanya diperlukan sedikit tambahan pekerjaan menghitung nilai fungsi dengan menggunakan Metoda C dalam mencari nilai terbaik M. Bagaimanapun juga, waktu yang dibutuhkan lebih banyak apabila Metoda C dibandingkan dengan Metoda A.

KESIMPULAN

Penggunaan metoda Newton-Raphson dalam komputasi numerik sangat banyak dipakai. Akan tetapi metoda ini memiliki kelemahan dimana nilai awal harus diberikan (diketahui) dan untuk mencapai kekonvergenan kuadratik nilai awal harus cukup dekat dengan nilai sebenarnya. Khusus untuk masalah akar ganda, metoda ini mengalami kekonvergenan linier. Hal ini disebabkan oleh bentuk turunan fungsi yang akan digunakan untuk menghampiri akar sedikit berbeda. Dengan melakukan modifikasi seperti Metoda A, B dan C di atas, maka kekonvergenan secara kuadratik dapat dicapai.

DAFTAR PUSTAKA

1. Atkinson, K.E. 1989. An Introduction to Numerical Analysis. New York : Wiley.
2. Mathews, John H. 1992. Numerical Methods for Science and Engineering. New Jersey : Prentice Hall.
3. Mathews, John H. 1989. An Improved Newton's Method, Mathematical Exposition, Volume 10, Number 2 : 9-14.
4. Nakamura, S. 1993. Applied Numerical Methods in C. Singapore : Prentice Hall.
5. Rice, J.R. (1983). Numerical Methods, software and analysis : IMSL reference edition. New York : McGraw-Hill.

Repository University Of Riau
PERPUSTAKAAN UNIVERSITAS RIAU
http://repository.unri.ac.id/